

Московский государственный технический университет
имени Н. Э. Баумана

А.А. Федотов, П.В. Храпов

**Численные методы
интегрирования, решения
дифференциальных уравнений
и задач оптимизации**

Учебное пособие



Москва
ИЗДАТЕЛЬСТВО
МГТУ им. Н. Э. Баумана
2 0 1 5

УДК 517.518.12
ББК 22.193
Ф34

Издание доступно в электронном виде на портале *ebooks.bmstu.ru*
по адресу: <http://ebooks.bmstu.ru/catalog/109/book1280.html>

Факультет «Фундаментальные науки»
Кафедра «Высшая математика»

*Рекомендовано Редакционно-издательским советом
МГТУ им. Н.Э. Баумана в качестве учебного пособия*

Фетодов, А. А.

Ф34 Численные методы интегрирования, решения дифференциальных уравнений и задач оптимизации : учебное пособие / А. А. Фетодов, П. В. Храпов. — Москва : Издательство МГТУ им. Н. Э. Баумана, 2015. — 76, [2] с.: ил.

ISBN 978-5-7038-4235-5

Рассмотрены численные методы интегрирования, решения дифференциальных уравнений и оптимизации. Изложены методы решения задачи Коши и краевой задачи для обыкновенных дифференциальных уравнений и систем дифференциальных уравнений. Приведены варианты индивидуальных заданий к лабораторным работам.

Для студентов 2-го курса факультетов «Машиностроительные технологии», «Специальное машиностроение» и «Робототехника и комплексная автоматизация» МГТУ им. Н.Э. Баумана, а также для студентов других факультетов.

УДК 517.518.12
ББК 22.193

ISBN 978-5-7038-4235-5

© МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2015
© Оформление. Издательство
МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2015

Предисловие

Пособие содержит теоретический материал и варианты заданий к лабораторным работам по курсу «Численные методы».

В первой главе представлены численные методы для приближенного вычисления однократных интегралов, в частности, квадратурные формулы средних прямоугольников, формулы трапеций, Симпсона и Гаусса.

Во второй главе рассмотрены численные методы вычисления двойных интегралов: метод ячеек и метод последовательного интегрирования.

В третьей главе излагаются приближенные методы решения задачи Коши для обыкновенного дифференциального уравнения первого порядка. Изучается метод Эйлера, приводятся расчетные формулы методов Рунге — Кутты второго и четвертого порядков точности, дается изложение метода Адамса. Обсуждается распространение рассмотренных методов на случай задачи Коши для нормальной системы обыкновенных дифференциальных уравнений.

В четвертой главе изучаются приближенные методы решения краевой задачи для линейного обыкновенного дифференциального уравнения второго порядка: решение разностной задачи методом прогонки и методом стрельбы.

В пятой главе представлены численные методы одномерной и многомерной оптимизации. Изложены методы покоординатного спуска, наискорейшего спуска, методы сопряженных градиентов и проекции градиента.

Литература, рекомендуемая для более полного ознакомления с рассмотренными в работе вопросами, приводится в конце пособия.

1. ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ ВЫЧИСЛЕНИЯ ОПРЕДЕЛЕННОГО ИНТЕГРАЛА

Постановка задачи. Требуется вычислить приближенно интеграл

$$I = \int_a^b f(x) dx,$$

где $f(x)$ — непрерывная на отрезке $[a, b]$ функция.

1.1. Квадратурные формулы

В качестве приближенного значения интеграла I рассматривается число

$$I_n = \sum_{i=0}^n q_i f(x_i), \quad (1.1)$$

где $f(x_i)$ — значения функции $f(x)$ в точках x_i , $i = 0, 1, \dots, n$; q_i — числовые коэффициенты. Формула (1.1) называется *квадратурной формулой*. Точки x_i называются *узловыми точками*, или *узлами*, квадратурной формулы, а числа q_i — *весовыми коэффициентами*, или *весами*, квадратурной формулы. Разность

$$I = \int_a^b f(x) dx R_n = I - I_n = \int_a^b f(x) dx - \sum_{i=0}^n q_i f(x_i)$$

называется *погрешностью* квадратурной формулы. Погрешность зависит как от расположения узлов, так и от выбора весовых коэффициентов.

Говорят, что квадратурная формула точна для многочленов степени s , если при замене $f(x)$ на произвольный алгебраиче-

ский многочлен степени не выше s приближенное равенство $I \approx I_n$ становится точным.

Введем некоторые понятия, которые будут использоваться в дальнейших рассуждениях.

Определение 1. Будем говорить, что функция $f(x)$ принадлежит классу $C^k[a, b]$, и писать $f \in C^k[a, b]$, если функция $f(x)$ определена на отрезке $[a, b]$ и имеет на нем непрерывные производные до порядка k включительно.

Определение 2. Пусть $\varphi(h)$ — некоторая функция переменной h с конечной областью определения D_φ на полуоси $h > 0$, причем $h \in D_\varphi$ может принимать сколь угодно малые значения. Тогда если существуют положительные числа h_0, c, k такие, что при всех $h \in D_\varphi$, удовлетворяющих условию $0 < h \leq h_0$, выполняется неравенство $|\varphi(h)| \leq ch^k$, то пишут $\varphi(h) = O(h^k)$ и говорят, что $\varphi(h)$ есть O большое от h^k (при $h \rightarrow 0$).

Согласно данному определению, выполняются следующие очевидные свойства. Если $\varphi(h) = O(h^k)$, $\psi(h) = O(h^k)$, причем $D_\varphi = D_\psi$, то $\varphi(h) + \psi(h) = O(h^k)$, т. е. $O(h^k) + O(h^k) = O(h^k)$.

Если $k > m > 0$, то $O(h^k)$ в то же время есть $O(h^m)$. Наконец, если $\varphi(h) = O(h^k)$, то $\alpha\varphi(h) = O(h^k)$, где α — постоянная, не зависящая от h .

Рассмотрим наиболее простые квадратурные формулы.

1.1.1. Формула средних прямоугольников

Допустим, что $f \in C^2\left[-\frac{h}{2}, \frac{h}{2}\right]$, $h > 0$. Положим приближенно

$$I = \int_{-h/2}^{h/2} f(x) dx \approx hf_0, \quad (1.2)$$

где $f_0 = f(0)$.

Формула (1.2) означает, что площадь криволинейной трапеции, ограниченной сверху графиком функции $f(x)$, аппроксимируется

площадью закрашенного прямоугольника (рис. 1.1, а), высота которого равна значению f_0 функции $f(x)$ в *средней* точке $x = 0$ отрезка $\left[-\frac{h}{2}, \frac{h}{2}\right]$. Формула (1.2) называется формулой средних прямоугольников.

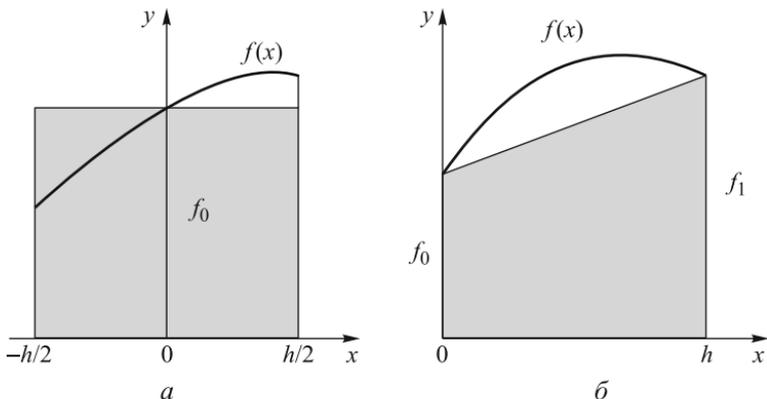


Рис. 1.1. Формула средних прямоугольников (а), формула трапеций (б)

Получим формулу средних прямоугольников с остаточным членом. Пусть

$$F(x) = \int_0^x f(t) dt.$$

Так как $F(0) = 0$, $F'(0) = f_0$, $F''(0) = f'_0$, $F'''(x) = f''(x)$, то, согласно формуле Тейлора с остаточным членом в форме Лагранжа, имеем

$$F\left(\pm \frac{h}{2}\right) = F(0) \pm \frac{h}{2} F'(0) + \frac{h^2}{8} F''(0) \pm \frac{h^3}{48} F'''(\xi_{\pm}),$$

или

$$F\left(\pm \frac{h}{2}\right) = \pm \frac{h}{2} f_0 + \frac{h^2}{8} f'_0 \pm \frac{h^3}{48} f''(\xi_{\pm}), \quad (1.3)$$

где ξ_-, ξ_+ — некоторые точки, причем $-\frac{h}{2} < \xi_- < 0 < \xi_+ < \frac{h}{2}$.

С учетом (1.3) получаем

$$\int_{-h/2}^{h/2} f(x)dx = F\left(\frac{h}{2}\right) - F\left(-\frac{h}{2}\right) = hf_0 + \frac{h^3}{24} \frac{f''(\xi_-) + f''(\xi_+)}{2}.$$

Далее нам понадобится следующая лемма.

Лемма. Пусть $f \in C[a, b]$, $\xi_i \in [a, b]$ — произвольные точки, $i = 1, 2, \dots, n$. Тогда существует такая точка $\xi \in [a, b]$, что

$$[f(\xi_1) + f(\xi_2) + \dots + f(\xi_n)]/n = f(\xi).$$

Эта лемма вытекает из очевидных неравенств

$$\min_{x \in [a, b]} f(x) \leq [f(\xi_1) + f(\xi_2) + \dots + f(\xi_n)]/n \leq \max_{x \in [a, b]} f(x)$$

и теоремы о промежуточных значениях непрерывной функции.

Формулу средних прямоугольников с остаточным членом

$$\int_{-h/2}^{h/2} f(x)dx = hf_0 + \frac{h^3}{24} f''(\xi), \quad |\xi| \leq \frac{h}{2}$$

получаем, используя лемму.

1.1.2. Формула трапеций

Пусть $f \in C^2[0, h]$. Полагаем

$$I = \int_0^h f(x)dx \approx h \frac{f_0 + f_1}{2}, \quad (1.4)$$

где $f_0 = f(0)$, $f_1 = f(h)$. Из формулы (1.4) видно, что искомое значение интеграла приближенно заменяется величиной площади трапеции, закрашенной на рис. 1.1, б.

Формулу трапеций с остаточным членом

$$\int_0^h f(x)dx = h \frac{f_0 + f_1}{2} - \frac{h^3}{12} f''(\xi), \quad \xi \in [0, h].$$

можно получить аналогично тому, как это было сделано в п. 1.1.1.

1.1.3. Формула Симпсона

Предположим, что $f \in C^4[-h, h]$ и требуется вычислить интеграл

$$I = \int_{-h}^h f(x) dx.$$

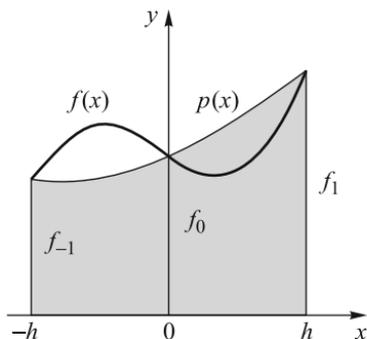


Рис. 1.2. Формула Симпсона

Значение этого интеграла приближенно заменяем величиной площади закрашенной криволинейной трапеции (рис. 1.2), ограниченной сверху параболой $p(x)$, проходящей через точки $(-h, f_{-1})$, $(0, f_0)$, (h, f_1) , где $f_i = f(ih)$, $i = -1, 0, 1$. Эта парабола задается уравнениями

$$p(x) = f_0 + \frac{f_1 - f_{-1}}{2h}x + \frac{f_1 - 2f_0 + f_{-1}}{2h^2}x^2$$

и

$$\int_{-h}^h p(x) dx = \frac{h}{3}(f_{-1} + 4f_0 + f_1).$$

Следовательно,

$$\int_{-h}^h f(x) dx \approx \frac{h}{3}(f_{-1} + 4f_0 + f_1). \quad (1.5)$$

Формула Симпсона с остаточным членом имеет вид:

$$\int_{-h}^h f(x) dx = \frac{h}{3}(f_{-1} + 4f_0 + f_1) - \frac{h^5}{90} f^{(IV)}(\xi), \quad \xi \in [-h, h].$$

Рассмотренные квадратурные формулы средних прямоугольников (1.2), трапеций (1.4) и Симпсона (1.5) назовем *каноническими*.

1.1.4. Составные квадратурные формулы

На практике, если требуется вычислить приближенно интеграл, обычно делят заданный отрезок $[a, b]$ на n равных частичных отрезков $[x_{i-1}, x_i]$, где $x_i = a + ih$, $i = 0, 1, \dots, n$; $x_0 = a$, $x_n = b$, $h = (b - a)/n$. На каждом частичном отрезке используют каноническую квадратурную формулу и суммируют полученные результаты. При применении формул средних прямоугольников и трапеций длину частичных отрезков удобно принять за h , а при использовании формулы Симпсона — за $2h$. В результате получаются следующие формулы, которые будем называть *составными*.

Составная квадратурная формула средних прямоугольников (рис. 1.3) записывается в виде

$$\int_a^b f(x) dx \approx h(f_{c_1} + f_{c_2} + \dots + f_{c_n}), \quad (1.6)$$

где $h = (b - a)/n$, $f_{c_i} = f(x_{c_i})$; $x_{c_i} = a + (i - 1/2)h$, $i = 0, 1, \dots, n$ — координаты средних точек частичных отрезков $[x_{i-1}, x_i]$.

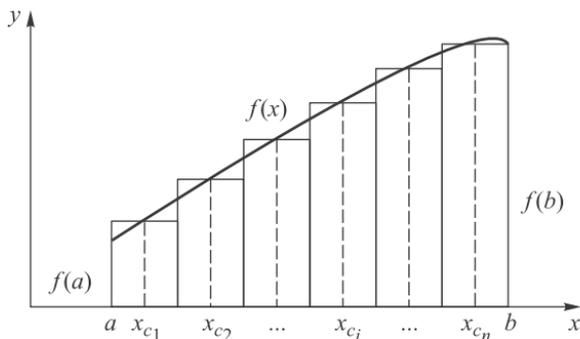


Рис. 1.3. Составная квадратурная формула средних прямоугольников

Погрешность R_n получается в результате суммирования погрешностей по частичным отрезкам

$$R_n = \frac{h^3}{24} \sum_{i=1}^n f''(\xi_i) = \frac{h^3}{24} n \left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n f''(\xi_i) \right),$$

где $x_{i-1} < \xi_i < x_i$. В соответствии со сформулированной выше леммой последнее выражение для R_n можно переписать в виде

$$R_n = \frac{h^3}{24} n f''(\xi) = h^2 \frac{(b-a)}{24} f''(\xi), \quad \xi \in [a, b].$$

Пусть M — максимальное значение модуля второй производной функции $f(x)$ на отрезке $[a, b]$, т. е. $M = \max_{x \in [a, b]} |f''(x)|$; тогда из выражения для R_n получаем следующую оценку:

$$|R_n| \leq h^2 \frac{(b-a)M}{24}.$$

Это означает, что погрешность формулы средних прямоугольников на всем отрезке интегрирования $[a, b]$ есть величина $O(h^2)$ (см. определение 2).

В этом случае говорят, что квадратурная формула имеет *второй порядок точности*.

Примечание. Возможны формулы прямоугольников и при ином, чем в формуле средних прямоугольников, расположении узлов. Например,

$$\int_a^b f(x) dx \approx \sum_{i=1}^n h f_{x_{i-1}}, \quad \int_a^b f(x) dx \approx \sum_{i=1}^n h f_{x_i}.$$

Однако из-за нарушения симметрии погрешность таких формул является величиной $O(h)$, т. е. порядок точности этих формул на единицу ниже порядка точности формулы средних прямоугольников.

Составная квадратурная формула трапеций имеет вид

$$\int_a^b f(x) dx \approx h \left(\frac{f_0}{2} + f_1 + f_2 + \dots + f_{n-1} + \frac{f_n}{2} \right), \quad (1.7)$$

где $f_i = f(x_i)$, $x_i = a + ih$, $h = (b-a)/n$, $i = 0, 1, \dots, n$.

Аналогично предыдущему случаю можно получить выражение для погрешности R_n составной формулы трапеций

$$R_n = -h^2 \frac{(b-a)}{12} f''(\xi), \quad \xi \in [a, b].$$

Тогда имеет место оценка

$$|R_n| \leq h^2 \frac{(b-a)M}{12}, \quad M = \max_{x \in [a, b]} |f''(x)|.$$

Таким образом, формула трапеций (1.7) имеет, так же как и формула средних прямоугольников (1.6), второй порядок точности ($R_n = O(h^2)$); следует заметить, что ее погрешность оценивается величиной, в два раза большей, чем погрешность формулы средних прямоугольников.

Составная квадратурная формула Симпсона записывается так:

$$\int_a^b f(x) dx \approx \frac{h}{3} \left(f_0 + f_{2n} + 4 \sum_{i=1}^n f_{2i-1} + 2 \sum_{i=1}^{n-1} f_{2i} \right), \quad (1.8)$$

где $f_j = f(x_j)$; $x_j = a + jh$; $h = (b - a)/(2n)$; $j = 0, 1, \dots, 2n$.

Погрешность составной формулы Симпсона имеет вид

$$R_n = -h^4 \frac{(b-a)}{180} f^{(IV)}(\xi), \quad \xi \in [a, b].$$

Отсюда получаем оценку

$$|R_n| \leq h^4 \frac{(b-a)M}{180}, \quad M = \max_{x \in [a, b]} |f^{(IV)}(x)|,$$

т. е. составная формула Симпсона существенно точнее, чем формулы средних прямоугольников и трапеций. Она имеет на отрезке $[a, b]$ четвертый порядок точности ($R_n = O(h^4)$).

Из выражений погрешностей видно, что формулы средних прямоугольников и трапеций точны для многочленов первой степени, т. е. для линейных функций, а формула Симпсона точна для многочленов третьей степени (для них погрешность равна нулю).

1.1.5. Квадратурные формулы Гаусса

Будем считать, что интеграл предварительно приведен к стандартной форме, когда областью интегрирования является отрезок $[-1, 1]$. Итак, пусть

$$I = \int_{-1}^1 f(x) dx.$$

Мы рассматривали до сих пор квадратурные формулы с заданными узлами и убедились, что формулы средних прямоугольников

$$q_j = \int_{-1}^1 Q_{n-1,j}(x) dx, \quad j=1, \dots, n, \quad (1.11)$$

где подынтегральная функция

$$Q_{n-1,j}(x) = \frac{(x-x_1)(x-x_2)\dots(x-x_{j-1})(x-x_{j+1})\dots(x-x_n)}{(x_j-x_1)(x_j-x_2)\dots(x_j-x_{j-1})(x_j-x_{j+1})\dots(x_j-x_n)}.$$

Функция $Q_{n-1,j}(x)$ является полиномом степени $(n-1)$. В числителе у него стоит произведение $(n-1)$ множителей $(x-x_i)$, $i=1, \dots, n$, $i \neq j$; в знаменателе — значение числителя в узле $x=x_j$. Таким образом, полином $Q_{n-1,j}(x)$ в узлах x_i принимает следующие значения:

$$Q_{n-1,j}(x_i) = \begin{cases} 0, & i \neq j, \\ 1, & i = j. \end{cases}$$

Полиномы Лежандра определяются формулой

$$P_n(x) = \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n}{dx^n} (x^2-1)^n, \quad n=0, 1, 2, \dots \quad (1.12)$$

Согласно (1.12), $P_0(x)=1$, $P_1(x)=x$. Для последующих значений n можно воспользоваться рекуррентным соотношением

$$nP_n(x) = (2n-1)xP_{n-1}(x) - (n-1)P_{n-2}(x).$$

Пользуясь этой формулой, выпишем полиномы Лежандра для $n=2, 3, 4, 5$:

$$P_2(x) = \frac{1}{2}(3x^2-1); \quad P_3(x) = \frac{1}{2}(5x^3-3x),$$

$$P_4(x) = \frac{1}{8}(35x^4-30x^2+3); \quad P_5(x) = \frac{1}{8}(63x^5-70x^3+15x).$$

Графики полиномов $P_n(x)$ до $n=5$ представлены на рис. 1.4.

Полиномы Лежандра с четными номерами являются четными функциями, а с нечетными номерами — нечетными функциями. Полиномы Лежандра $P_n(x)$ в точках $x=\pm 1$ принимают следующие

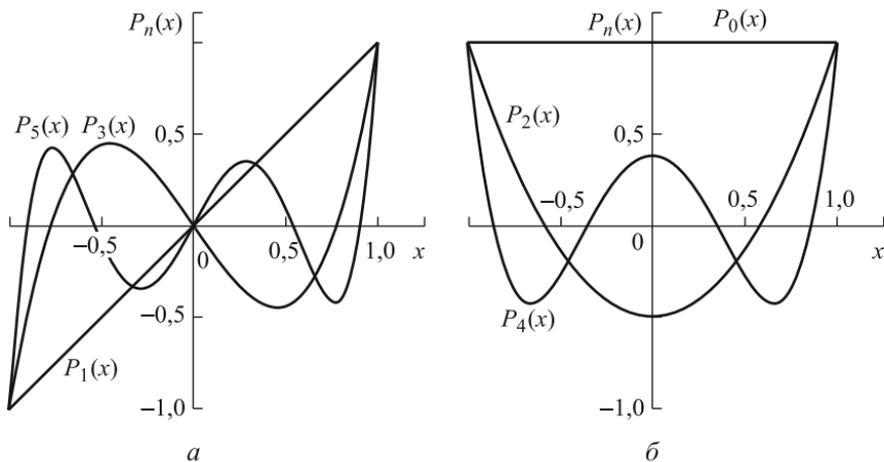


Рис. 1.4. Графики полиномов Лежандра $P_n(x)$ до $n = 5$:

a — $n = 1, 3, 5$; b — $n = 2, 4$

значения: $P_n(1) = 1$, $P_n(-1) = (-1)^n$. На интервале $(-1, 1)$ многочлен $P_n(x)$ имеет n простых нулей. В силу четности или нечетности $P_n(x)$ нули полиномов Лежандра располагаются симметрично относительно точки $x = 0$.

Можно показать, что весовые коэффициенты q_j (1.11) квадратурной формулы Гаусса положительны. Кроме того, в симметричных относительно точки $x = 0$ корнях полинома Лежандра $x_j = -x_{n-(j-1)}$ весовые коэффициенты, соответствующие этим узлам, совпадают при любом n : $q_j = -q_{n-(j-1)}$.

Приведем значения корней x_i и соответствующих им весов q_i квадратурных формул Гаусса для $n = 1, \dots, 5$:

$$n = 1: x_1 = 0, q_1 = 2;$$

$$n = 2: -x_1 = x_2 = \sqrt{1/3}, q_1 = q_2 = 1; \quad (1.13)$$

$$n = 3: -x_1 = x_3 = \sqrt{3/5}, x_2 = 0, q_1 = q_3 = 5/9, q_2 = 8/9;$$

$$n = 4: -x_1 = x_4 = \sqrt{(15 + 2\sqrt{30})/35}, -x_2 = x_3 = \sqrt{(15 - 2\sqrt{30})/35},$$

$$q_1 = q_4 = (18 - \sqrt{30})/36, q_2 = q_3 = (18 + \sqrt{30})/36;$$

$$\begin{aligned}
 n = 5: \quad -x_1 = x_5 = \sqrt{(35 + 2\sqrt{70})/63}, \quad -x_2 = x_3 = \sqrt{(35 - 2\sqrt{70})/63}, \\
 q_1 = q_5 = (322 - 13\sqrt{70})/900, \quad q_2 = q_4 = (322 + 13\sqrt{70})/900, \\
 x_3 = 0, \quad q_3 = 128/225.
 \end{aligned}
 \tag{1.13}$$

Численные значения узлов x_i и весов q_i (1.13) с десятью десятичными знаками после запятой приведены в табл. 1.1.

Таблица 1.1

**Координаты узловых точек и весовые коэффициенты
квadrатурной формулы Гаусса**

Число узлов n	Номер угловой точки i	Координата угловой точки x_i	Весовой коэффициент q_i
1	1	0	2
2	1	$x_1 = -x_2$	1
	2	0,5773502692	1
3	1	$x_1 = -x_3$	$q_1 = q_3$
	2	0	0,8888888889
	3	0,7745966692	0,5555555556
4	1	$x_1 = -x_4$	$q_1 = q_4$
	2	$x_2 = -x_3$	$q_2 = q_3$
	3	0,3399810436	0,6521451549
	4	0,8611363116	0,3478548451
5	1	$x_1 = -x_5$	$q_1 = q_5$
	2	$x_2 = -x_4$	$q_2 = q_3$
	3	0	0,5688888889
	4	0,5384693101	0,4786286705
	5	0,9061798459	0,2369268851

1.2. Правило Рунге практической оценки погрешности

При выводе формулы средних прямоугольников предполагалось, что $f \in C^2[a, b]$. Погрешность этой формулы, выражающаяся через вторую производную $f''(x)$, есть величина $O(h^2)$. Если

подынтегральная функция имеет производные старших порядков, то можно получить более содержательную оценку погрешности.

Если $f \in C^4[a, b]$, то можно получить следующее выражение

для $I = \int_a^b f(x)dx$:

$$I = I_h^{\text{np}} + ch^2 + O(h^4), \quad (1.14)$$

где I_h^{np} — значение интеграла, вычисленное по составной формуле средних прямоугольников с шагом h , $h = (b - a)/n$; c — постоянная, не зависящая от h ,

$$c = \frac{1}{24} \int_a^b f''(x)dx.$$

Величина ch^2 в выражении (1.14) называется главной частью погрешности формулы средних прямоугольников. Может случиться, что $c = 0$. Тогда главная часть погрешности формулы средних прямоугольников является величиной порядка h^4 . Но обычно $c \neq 0$.

Если $f \in C^4[a, b]$, то можно получить также соотношение

$$I = I_h^{\text{tp}} + c_1 h^2 + O(h^4), \quad (1.15)$$

где I_h^{tp} — приближенное значение интеграла I , найденное по составной формуле трапеций с шагом h ; c_1 — постоянная, не зависящая от h ,

$$c_1 = -\frac{1}{12} \int_a^b f''(x)dx.$$

Если $f \in C^6[a, b]$, то аналогично выражениям (1.14) и (1.15) можно получить следующее соотношение:

$$I = I_h^{\text{C}} + c_2 h^4 + O(h^6), \quad (1.16)$$

где I_h^{C} — приближенное значение интеграла I , найденное по составной формуле Симпсона; c_2 — некоторая не зависящая от h постоянная.

Правило Рунге. Пусть I_h — приближенное значение интеграла I , найденное по одной из трех рассмотренных составных формул

(по формулам средних прямоугольников, трапеций и Симпсона). Объединим соотношения (1.14), (1.15) и (1.16) в одно:

$$I = I_h + ch^k + O(h^{k+2}), \quad (1.17)$$

где c не зависит от h ; k — порядок точности квадратурной формулы ($k = 2$ для составных формул средних прямоугольников и трапеций, $k = 4$ для составной формулы Симпсона). Предполагается, что $f \in C^{k+2}[a, b]$.

На основании формулы (1.17) можем записать, что

$$I = I_{h/2} + c\left(\frac{h}{2}\right)^k + O(h^{k+2}). \quad (1.18)$$

Вычитая равенство (1.18) из (1.17), находим

$$I_{h/2} - I_h = c\left(\frac{h}{2}\right)^k (2^k - 1) + O(h^{k+2}).$$

Отсюда

$$c\left(\frac{h}{2}\right)^k = \frac{I_{h/2} - I_h}{(2^k - 1)} + O(h^{k+2}),$$

и, следовательно, согласно формуле (1.18), с точностью до $O(h^{k+2})$ имеем

$$I_{h/2} - I_h \approx \frac{I_{h/2} - I_h}{(2^k - 1)}. \quad (1.19)$$

Вычисление приближенной оценки погрешности по формуле (1.19) при выполнении условия (1.17), т. е. при возможности представления значения интеграла I в виде (1.17), называется *правилом Рунге*.

Вычитая из умноженного на 2^k равенства (1.18) равенство (1.17), получаем

$$I(2^k - 1) = 2^k I_{h/2} - I_h + O(h^{k+2}).$$

Отсюда

$$I = I_h^* + O(h^{k+2}),$$

где

$$I_h^* = \frac{2^k I_{h/2} - I_h}{2^k - 1}.$$

Число I_h^* называется *уточненным по Ричардсону приближенным значением* интеграла I .

1.3. Задание к лабораторной работе

Для предложенного варианта лабораторной работы необходимо:

1. Вычислить интеграл $I = \int_a^b f(x)dx$ аналитически.

2. Вычислить интеграл численно с точностью до $\varepsilon = 0,0001$:

- по формуле средних прямоугольников;
- по формуле трапеций;
- по формуле Симпсона.

Точность вычислений определяется с помощью правила Рунге. Точность ε , с которой необходимо найти приближенное значение интеграла, считается достигнутой, когда в процессе вычислений будет выполнено неравенство

$$\frac{|I_{h/2} - I_h|}{(2^k - 1)} < \varepsilon.$$

Алгоритм вычислений с использованием правила Рунге. Приближенное вычисление интеграла с заданной точностью ε проводим *методом итераций*. На l -й итерации вычисляем значение $I_l = I_h$ интеграла I по одной из трех требуемых составных формул приближенного вычисления интегралов с шагом h_l , затем находим значение $I_{l+1} = I_{h/2}$ по той же составной формуле, но с шагом $h_{l+1} = h_l/2$. Если для найденных значений I_l и I_{l+1} выполняется неравенство

$$\frac{|I_{l+1} - I_l|}{(2^k - 1)} < \varepsilon, \quad (1.20)$$

то точность считается достигнутой. В противном случае проводим следующую итерацию: I_l присваиваем значение I_{l+1} , увеличива-

ем в два раза число разбиений n , находим новое значение I_{l+1} и опять проверяем выполнение условия (1.20).

При вычислении начального приближения I_0 (для $l=1$) в качестве шага h_0 можно взять значение $h_0 \approx \sqrt[k]{\varepsilon}$. Однако при этом соответствующее значению h_0 первоначальное число разбиений n_0 , если его определять по формуле $n_0 = (b-1)/h_0$, скорее всего окажется не целым числом. Число разбиений n по своему смыслу на каждой итерации l должно быть целым, поэтому вначале надо задавать число разбиений, а затем вычислять шаг, соответствующий данному числу разбиений. Это можно сделать следующим образом. Для формул средних прямоугольников и трапеции:

$$n_0 = \left[\frac{b-a}{\sqrt{\varepsilon}} \right] + 1, \quad h_0 = \frac{b-a}{n_0}; \quad (1.21)$$

для формулы Симпсона:

$$n_0 = \left[\frac{b-a}{2\sqrt[4]{\varepsilon}} \right] + 1, \quad h_0 = \frac{b-a}{2n_0}. \quad (1.22)$$

В этих формулах квадратные скобки обозначают целую часть заключенного в них числа.

3. Дать оценку сверху погрешности вычислений, используя формулы, выражающие R_n через соответствующие производные подынтегральной функции.

4. Оценить погрешность как разность между точным значением интеграла и значением, полученным численным методом.

5. Сравнить между собой погрешности, полученные в п. 3 и 4.

6. Оформить отчет по лабораторной работе. Отчет должен содержать описание использованного метода, результаты и текст программы.

Варианты лабораторной работы и ответы представлены в табл. 1.2.

Таблица 1.2

Варианты лабораторной работы

№ варианта	a	b	Функция $f(x)$	Ответ
1	0	1	$e^x + 1$	e
2	0	1	$2^x + 1/\ln 2$	$2/\ln 2$

№ варианта	a	b	Функция $f(x)$	Ответ
3	0	1	$3^x + 1/\ln 3$	$3/\ln 3$
4	0,1	$0,1e$	$\ln(10x)$	0,1
5	0,2	$0,2e$	$\ln(5x)$	0,2
6	1	2	$e^x + 1/x$	$e(e-1) + \ln 2$
7	0	1	xe^x	1
8	1	e	$x^2 + 16/x$	$(e^3 - 1)/3 + 16$
9	0	1	$2x - e^{-x}$	$1/e$
10	1	2	$2x + 1/x$	$3 + \ln 2$
11	1	2	$3x^2 + 1/x$	$7 + \ln 2$
12	0	1	$4x^3 - e^{-x}$	$1/e$
13	0	1	$2x + e^x$	e
14	0	1	$1/(1+x^2)$	$\pi/4$
15	0	1	$1 - 2xe^{-x^2}$	$1/e$
16	0	1	$2xe^{x^2}$	$e - 1$
17	0	1	$1 - xe^{-x}$	$2/e$
18	1	e	$\ln^2 x/x$	$1/3$
19	0	1	$x/(1+x^4)$	$\pi/8$
20	1	2	$e^{1/x}/x^2$	$e - \sqrt{e}$
21	$\ln 2$	$2\ln 2$	$1/(e^x - 1)$	$\ln(3/2)$
22	0	$\pi/2$	$\cos^3 x \sin(2x)$	$2/5$
23	1	$\pi/2$	$(x + \sin x)/(1 + \cos x)$	$\pi/2$
24	1	2	$1/(x + x^2)$	$\ln(4/3)$
25	0	$\pi/2$	$e^x \cos x$	$(e^{\pi/2} - 1)/2$
26	0	1	e^{x+e^x}	$e^e - e$
27	0,5	$0,5e$	$\ln(2x)$	$1/2$
28	0	1	4^x	$1/\ln 4$
29	0	1	$5^x + 1/\ln 5$	$5/\ln 5$
30	0	1	$10^x + 1/\ln 10$	$10/\ln 10$

2. ПРИБЛИЖЕННОЕ ВЫЧИСЛЕНИЕ ДВОЙНОГО ИНТЕГРАЛА

Постановка задачи. Требуется вычислить двойной интеграл

$$I = \iint_D f(x, y) dx dy, \quad (2.1)$$

где $f(x, y)$ — непрерывная в области D функция двух переменных x и y . На практике редко удается выразить интеграл через элементарные функции и найти его точное значение. Поэтому обычно для вычисления интегралов применяются методы численного интегрирования. Они основаны на замене подынтегральной функции $f(x, y)$ аппроксимирующими ее функциями, интегралы от которых легко вычисляются в элементарных функциях. В качестве аппроксимирующих функций, например, можно использовать многочлены.

2.1. Численные методы вычисления двойного интеграла

Рассмотрим два способа численного интегрирования: метод ячеек и последовательное интегрирование.

2.1.1. Метод ячеек

Пусть сначала область интегрирования является прямоугольником $D = \{a \leq x \leq b, c \leq y \leq d\}$. Среднее значение $\bar{f}(x, y)$ непрерывной в области D функции $f(x, y)$ по теореме о среднем представляется выражением

$$\bar{f}(x, y) = \frac{1}{S} \iint_D f(x, y) dx dy, \quad S = (b - a)(d - c). \quad (2.2)$$

Считая, что среднее значение приближенно равняется значению функции в центре прямоугольника: $\bar{f}(x, y) \approx f(\bar{x}, \bar{y})$, где

$\bar{x} = (a + b)/2$, $\bar{y} = (c + d)/2$, из соотношения (2.1) получаем простейшую формулу для приближенного вычисления двойного интеграла:

$$\iint_D f(x, y) dx dy \approx S f(\bar{x}, \bar{y}). \quad (2.3)$$

Найдем погрешность формулы (2.3). Функцию $f(x, y)$ будем считать достаточно гладкой, т. е. будем полагать, что она имеет все необходимые для хода рассуждения непрерывные производные. Разложим функцию $f(x, y)$ по формуле Тейлора, принимая центр прямоугольника (точку (\bar{x}, \bar{y})) за точку разложения:

$$\begin{aligned} f(x, y) = & f(\bar{x}, \bar{y}) + (x - \bar{x})f'_x(\bar{x}, \bar{y}) + (y - \bar{y})f'_y(\bar{x}, \bar{y}) + \\ & + \frac{1}{2}(x - \bar{x})^2 f''_{xx}(\bar{x}, \bar{y}) + (x - \bar{x})(y - \bar{y})f''_{xy}(\bar{x}, \bar{y}) + \\ & + \frac{1}{2}(y - \bar{y})^2 f''_{yy}(\bar{x}, \bar{y}) + \dots \end{aligned} \quad (2.4)$$

Погрешность есть разность точного и приближенного значений интеграла. Подставляя в (2.3) формулу (2.4), получим главный член погрешности

$$\begin{aligned} R = & \iint_{a c}^{b d} f(x, y) dx dy - S f(\bar{x}, \bar{y}) \approx \\ \approx & \frac{1}{24} S [(b - a)^2 f''_{xx}(\bar{x}, \bar{y}) + (d - c)^2 f''_{yy}(\bar{x}, \bar{y})], \end{aligned} \quad (2.5)$$

где члены, отброшенные при замене точного равенства приближенным, содержат производные старших порядков и более высокие степени длин сторон прямоугольника D . Заметим, что все члены разложения, являющиеся нечетными функциями относительно центра прямоугольника, не вносят вклад в погрешность, поскольку интегралы от этих членов оказываются равными нулю.

В общем случае длины сторон прямоугольника $(b - a)$ и $(d - c)$ не малы, поэтому главный член погрешности (2.5) может быть велик. Для повышения точности вычислений в области D (рис. 2.1) вводится сетка $x_i = a + ih_1$, $y_j = c + jh_2$, $i = 0, 1, \dots, m$, $j = 0, 1, \dots, n$; $h_1 = (b - a)/m$, $h_2 = (d - c)/n$ с достаточно мелкими ячейками $\Delta D_{ij} = \{x_{i-1} \leq x \leq x_i, y_{j-1} \leq y \leq y_j, i = 1, \dots, m; j = 1, \dots, n\}$.

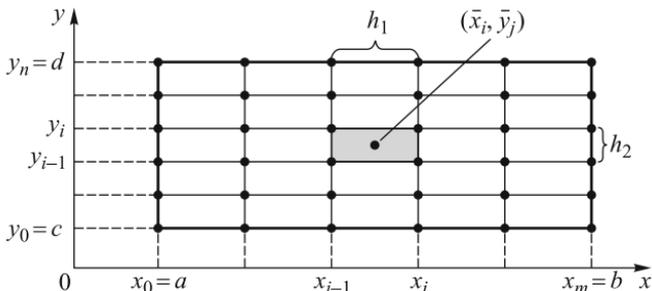


Рис. 2.1. Разбиение на ячейки области интегрирования D

Вычисляя интеграл для каждой ячейки по формуле (2.3) и суммируя найденные значения по всем ячейкам, получаем формулу *метода ячеек*

$$I \approx I_h = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n S_{ij} f(\bar{x}_i, \bar{y}_j), \quad (2.6)$$

где $S_{ij} = h_1 h_2$ — площадь ячейки; $\bar{x}_i = (x_{i-1} + x_i)/2$, $\bar{y}_j = (y_{j-1} + y_j)/2$ — координаты центра ячейки. Здесь и далее пусть I_h будет приближенным значением интеграла (2.1), вычисленным по формуле (2.6) с шагами h_1 и h_2 .

Справа в выражении (2.6) стоит интегральная сумма, поэтому для любой непрерывной функции $f(x, y)$ эта сумма сходится к значению интеграла, когда периметры всех ячеек стремятся к нулю.

Погрешность интегрирования (2.5) для одной ячейки ΔD_{ij} представляется в виде

$$R_{ij} \approx \frac{1}{24} S_{ij} \left[h_1^2 f''_{xx}(\bar{x}_i, \bar{y}_j) + h_2^2 f''_{yy}(\bar{x}_i, \bar{y}_j) \right]. \quad (2.7)$$

Суммируя выражения (2.7) по всем ячейкам, получаем погрешность метода ячеек

$$R \approx c_1 h_1^2 + c_2 h_2^2, \quad (2.8)$$

где

$$c_1 = \frac{1}{24} \iint_D f''_{xx}(x, y) dx dy, \quad c_2 = \frac{1}{24} \iint_D f''_{yy}(x, y) dx dy,$$

или

$$R = O(h_1^2 + h_2^2), \quad (2.9)$$

т. е. метод ячеек имеет второй порядок точности относительно шагов сетки h_1 и h_2 .

Заметим, что поскольку в оценке (2.7) отброшены более высокие степени h_1 и h_2 , то соотношение для погрешности (2.8) является асимптотическим, т. е. выполняется при $h_1 \rightarrow 0$ и $h_2 \rightarrow 0$ с точностью до членов более высокого порядка малости по h_1 и h_2 .

Для вычисления интеграла (2.1) с заданной точностью можно воспользоваться, как это следует из (2.9), правилом Рунге практической оценки погрешности. С помощью разложения $f(x, y)$ в окрестности центра каждой ячейки по формуле Тейлора до членов с производными четвертого порядка можно не только получить оценку главного члена погрешности (2.9), но и оценить следующие по порядку малости h_1 и h_2 члены погрешности. Заметим, что члены в разложении $f(x, y)$ по формуле Тейлора, содержащие производные третьего порядка, в силу симметрии области интегрирования ΔD_{ij} относительно точки разложения не вносят вклад в погрешность интегрирования. Поэтому, для того чтобы учесть следующие после главного члена по порядку малости h_1 и h_2 члены погрешности, необходимо разлагать $f(x, y)$ до членов, содержащих производные четвертого порядка. В результате интеграл (2.1) можно представить в виде

$$I = I_h + c_1 h_1^2 + c_2 h_2^2 + O(h_1^4 + h_1^2 h_2^2 + h_2^4). \quad (2.10)$$

Выражения для c_1 и c_2 были приведены выше (см. (2.8)). Здесь важно подчеркнуть, что c_1 и c_2 — не зависящие от h_1 и h_2 постоянные величины, причем они не должны одновременно обращаться в 0.

Таким образом, если известен главный член погрешности, то можно увеличить точность вычисления интеграла (2.1)

$$I \approx I_h + c_1 h_1^2 + c_2 h_2^2. \quad (2.11)$$

Однако постоянные c_1 и c_2 являются неизвестными величинами. Для того чтобы вычислить интеграл (2.1) с учетом главного

члена погрешности, можно поступить следующим образом. Сначала находим значение I_h , затем — значение $I_{h/2}$. Здесь $I_{h/2}$ — значение интеграла (2.1), вычисленное по формуле (2.6) с шагами $h_1/2$ и $h_2/2$. Теперь, наряду с выражением (2.11), можно написать соотношение

$$I \approx I_{h/2} + c_1 \left(\frac{h_1}{2} \right)^2 + c_2 \left(\frac{h_2}{2} \right)^2. \quad (2.12)$$

Тот факт, что сетка по каждой переменной x и y сгущается в одинаковое число раз, позволяет в выражении (2.11) выделить главный член погрешности $\left[c_1(h_1/2)^2 + c_2(h_2/2)^2 \right]$ формулы (2.12):

$$I \approx I_h + 4 \left[c_1 \left(\frac{h_1}{2} \right)^2 + c_2 \left(\frac{h_2}{2} \right)^2 \right]. \quad (2.13)$$

Из выражений (2.12) и (2.13) следует, что

$$I_h + 4 \left[c_1 \left(\frac{h_1}{2} \right)^2 + c_2 \left(\frac{h_2}{2} \right)^2 \right] \approx I_{h/2} + \left[c_1 \left(\frac{h_1}{2} \right)^2 + c_2 \left(\frac{h_2}{2} \right)^2 \right].$$

Из этого соотношения получаем выражение для главного члена погрешности формулы (2.12)

$$c_1 \left(\frac{h_1}{2} \right)^2 + c_2 \left(\frac{h_2}{2} \right)^2 \approx \frac{I_{h/2} - I_h}{3}. \quad (2.14)$$

Теперь, согласно (2.12), имеем приближенную оценку погрешности по правилу Рунге:

$$I - I_{h/2} \approx \frac{I_{h/2} - I_h}{3}. \quad (2.15)$$

Наконец, подставляя выражение (2.14) в (2.12), получаем значение интеграла (2.1) с учетом главного члена погрешности, т. е.

$$I \approx I_h^* = \frac{4I_{h/2} - I_h}{3},$$

где I_h^* — уточненное по Ричардсону значение интеграла I .

Примечания. 1. Подчеркнем, что для практической оценки погрешности по правилу Рунге сетка по каждой переменной сгущается одинаковое число раз, т. е. отношение m/n при сгущении сетки должно оставаться постоянным. В противном случае не удастся в результате двойного пересчета интеграла (2.1) по двум сеткам с разными размерами ячеек составить формулы типа (2.11) и (2.12), из которых можно найти главный член погрешности.

2. Понятно, что если одновременно $c_1 = 0$ и $c_2 = 0$, то для оценки погрешности вычисления интеграла (2.1) правило Рунге в виде (2.15) неприменимо.

Мы получили формулу (2.6) для вычисления интеграла в простейшем случае — для прямоугольной области. Если область не прямоугольная, то в ряде случаев исходный интеграл по такой области удобно преобразовать соответствующей заменой переменных к двойному интегралу по прямоугольной области. Например, если область задана в виде криволинейного четырехугольника $D = \{a \leq x \leq b, \varphi_1(x) \leq y \leq \varphi_2(x)\}$ (рис. 2.2, а), то с помощью замены переменных $x = x(u) = (b - a)u + a$, $y = \varphi_1(x(u)) + v(\varphi_2(x(u)) - \varphi_1(x(u)))$ исходная область D преобразуется в квадратную область $D' = \{0 \leq u \leq 1, 0 \leq v \leq 1\}$ (рис. 2.2, б).

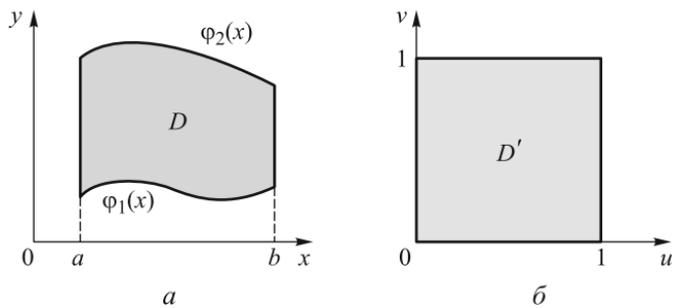


Рис. 2.2. Область интегрирования задана в виде криволинейного четырехугольника D (а); исходная область D преобразуется в квадратную область D' (б)

Напомним правило замены переменных в двойном интеграле. Если ограниченная замкнутая область D в плоскости Oxy взаимно однозначно отображается на область D' на плоскости Ouv с помощью непрерывно дифференцируемых функций $x = x(u, v)$, $y = y(u, v)$, причем якобиан преобразования

$$J = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} \neq 0,$$

то справедлива формула

$$\iint_D f(x, y) dx dy = \iint_{D'} f(x(u, v), y(u, v)) |J| du dv.$$

Методом ячеек можно вычислить интеграл и по области сложной формы, например, с криволинейной границей (рис. 2.3).

Интеграл в этом случае будем вычислять следующим образом. Наложим на область D прямоугольную сетку, и в интегральную сумму (2.6) будем включать только те ячейки, все точки которых принадлежат области D . В итоге на порядок понижается точность формулы (2.6), поэтому для вычисления интеграла с достаточной точностью требуется сетка с более мелкими ячейками.

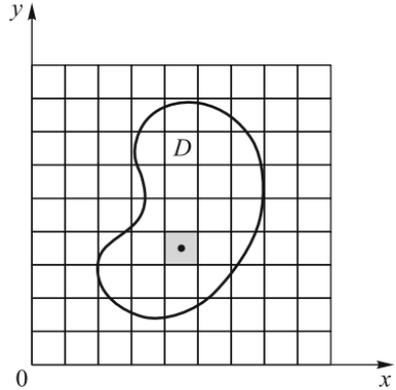


Рис. 2.3. Область с криволинейной границей

Следует отметить, что метод ячеек (2.6) легко переносится на большее число измерений (для вычисления тройных и большей кратности интегралов). В случае однократного интеграла аналогом метода ячеек является метод средних прямоугольников (1.6), рассмотренный в гл. 1.

2.1.2. Последовательное интегрирование с использованием формулы трапеций

Другой метод вычисления двойных интегралов — их сведение к последовательному вычислению однократных интегралов. Снова рассмотрим интеграл по прямоугольной области $D = \{a \leq x \leq b, c \leq y \leq d\}$ (рис. 2.4). Интеграл (2.1) можно вычислить последовательным интегрированием

$$I = \iint_D f(x, y) dx dy = \int_c^d \left(\int_a^b f(x, y) dx \right) dy. \quad (2.16)$$

Это выражение перепишем в виде

$$I = \int_c^d F(y) dy, \quad F(y) = \int_a^b f(x, y) dx. \quad (2.17)$$

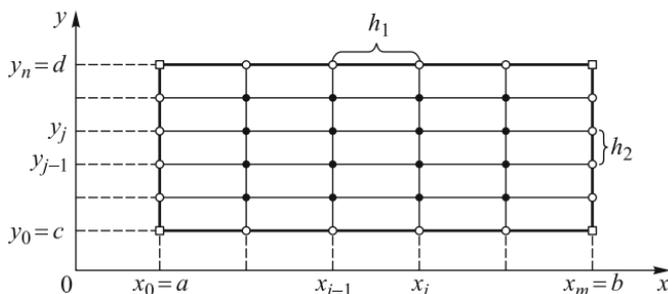


Рис. 2.4. Сетка, используемая при приближенном вычислении интеграла

Для вычисления этих интегралов могут быть использованы формулы из гл. 1. Например, пусть и по направлению x , и по направлению y для приближенного вычисления применяется формула трапеций (1.7). Тогда

$$F(y_j) \approx h_1 \sum_{i=0}^n q_{1,i} f(x_i, y_j), \quad (2.18)$$

где

$$q_{1,i} = \begin{cases} 1/2, & i = 0, m; \\ 1, & i = 1, 2, \dots, m-1, \end{cases}$$

и

$$I \approx h_2 \sum_{j=0}^n q_{2,j} F(y_j), \quad (2.19)$$

где

$$q_{2,j} = \begin{cases} 1/2, & j = 0, n; \\ 1, & j = 1, 2, \dots, n-1. \end{cases}$$

Подставляя выражение (2.18) в (2.19), получаем формулу последовательного интегрирования

$$I \approx I_h = h_1 h_2 \sum_{i=0}^m \sum_{j=0}^n q_{ij} f(x_i, y_j); \quad (2.20)$$

$$q_{ij} = q_{1,i} q_{2,j} = \begin{cases} 1/4, & i=0, m; \quad j=0, n; \\ 1/2, & \begin{cases} i=0, m; \quad j=1, \dots, n-1, \\ j=0, n; \quad i=1, \dots, m-1; \end{cases} \\ 1, & i=1, \dots, m-1; \quad j=1, \dots, n-1. \end{cases}$$

На рис. 2.4 приведена сетка, которая используется при приближенном вычислении интеграла (2.1) по формуле (2.20). Точками, кружочками и квадратиками показаны узловые точки, в которых коэффициенты $q_{ij} = 1, 1/2$ и $1/4$ соответственно.

Легко убедиться в том, что для дважды непрерывно дифференцируемой функции $f(x, y)$ формула (2.20) имеет второй порядок точности относительно шагов h_1 и h_2 и что можно применить правило Рунге практической оценки погрешности.

Примечание. Если в методе последовательного интегрирования воспользоваться формулой средних прямоугольников при интегрировании по каждому из направлений x и y , то в результате получится расчетная формула метода ячеек (2.6).

Случай сложной области. Метод последовательного интегрирования можно непосредственно применять и к области произвольной формы, например, с криволинейной границей (см. рис. 2.3). Однако для получения простых расчетных формул на практике всегда стараются свести исходный интеграл к сумме интегралов по прямоугольным областям.

2.1.3. Последовательное интегрирование с использованием квадратурных формул Гаусса

Для получения квадратурной формулы более высокой точности, чем формулы (2.20), можно воспользоваться квадратурными формулами Гаусса. При этом предварительно заменой переменных $x(u) = (a+b)/2 + u(b-a)/2$, $y(v) = (c+d)/2 + v(d-c)/2$ пря-

моугольная область $\{a \leq x \leq b, c \leq y \leq d\}$ преобразуется в квадратную область $D = \{-1 \leq u \leq 1, -1 \leq v \leq 1\}$. Поэтому будем считать, что с самого начала требуется вычислить интеграл по области $D = \{-1 \leq x \leq 1, -1 \leq y \leq 1\}$:

$$I = \iint_D f(x, y) dx dy = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 f(x, y) dx dy. \quad (2.21)$$

Применяя для интегрирования (2.21) и по направлению x , и по направлению y квадратурную формулу Гаусса с одинаковым числом узлов, получаем следующую формулу последовательного интегрирования:

$$I_n = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n q_i q_j f(x_i, y_j). \quad (2.22)$$

Значения координат узловых точек и весовых коэффициентов по направлениям x и y берутся из табл. 1.1.

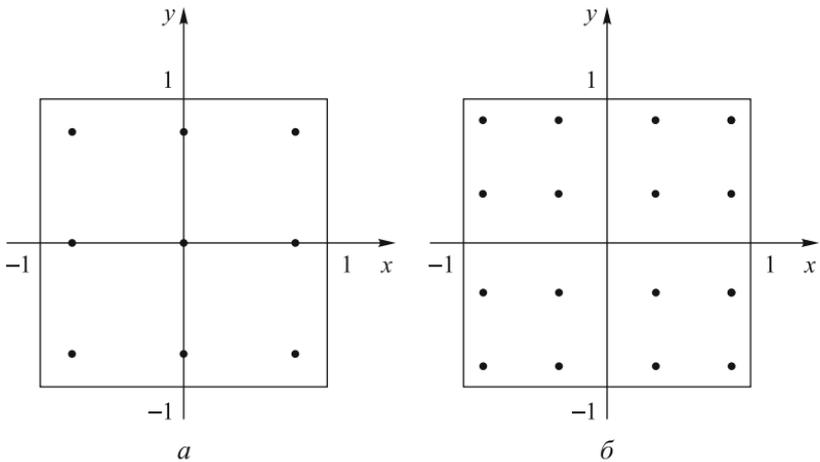


Рис. 2.5. Расположение узловых точек квадратурной формулы Гаусса: для $n = 3$ (а), для $n = 4$ (б)

Расположение узловых точек для $n = 3$ и $n = 4$ проиллюстрировано на рис. 2.5, а и б соответственно.

2.2. Задание к лабораторной работе

Для предложенного варианта лабораторной работы вычислите двойной интеграл по области D , где D — криволинейный четырехугольник $\{a \leq x \leq b, \varphi_1(x) \leq y \leq \varphi_2(x)\}$:

$$I = \iint_D f(x, y) dx dy.$$

Выполните вычисление:

1. Аналитически.

2. Численно с точностью до $\varepsilon = 0,0001$:

- методом ячеек;
- последовательным интегрированием с использованием формулы трапеций для интегрирования по направлениям x и y .

При численном решении область D предварительно отобразите в квадрат D' (см. рис. 2.2). Для оценки погрешности воспользуйтесь правилом Рунге.

Оформите отчет. Он должен содержать: постановку задачи и описание методов ее решения, текст программы, результаты расчетов.

Примечание. Результаты расчетов вывести на печать с пятью значащими цифрами после запятой. На основе сравнения приближенных значений интеграла, вычисленных методом ячеек и последовательным интегрированием, с точным значением убедиться в том, что приближенные вычислены с заданной точностью. На печать вывести значения числа итераций l , шагов h_1 и h_2 , а также чисел разбиений m и n , позволившие достигнуть заданной точности вычисления методом ячеек и последовательным интегрированием.

Варианты лабораторной работы и ответы представлены в табл. 2.1 и 2.2.

Таблица 2.1

Варианты лабораторной работы

№ варианта	Область D				Функция $f(x)$
	a	b	$\varphi_1(x)$	$\varphi_2(x)$	
1	0	1	x^2	$1+x$	xy^2
2	1	2	0	$1+\ln x$	e^y
3	0	$\pi/3$	0	$\cos x$	$\sin x/(1+y)$

№ варианта	Область D				Функция $f(x)$
	a	b	$\varphi_1(x)$	$\varphi_2(x)$	
4	1	e	$x-2$	$\ln x$	y/x
5	1	2	0	x	$x^2\sqrt{1+xy}$
6	0	1	x^2	$1+x$	x^2y
7	1	2	$\ln x$	$1+\ln x$	e^y
8	$\pi/6$	$\pi/2$	0	$\sin x$	$\cos x/(1+y)$
9	1	2	x	$2x$	$x \ln(xy)$
10	1	e	$\ln x$	x	y/x
11	1	2	0	$3-x$	$x+y^2$
12	1	2	$\ln x$	$1+\ln x$	e^{x+y}
13	0	$\pi/3$	0	$1/\cos x$	$y \operatorname{tg} x$
14	1	2	0	x	$4x^2 \ln(1+xy)$
15	1	2	0	\sqrt{x}	$2x^2y\sqrt{1+xy^2}$
16	0	1	0	$1+x$	$-x+y^2$
17	0	1	$\ln(1+x)$	$1+2\ln(1+x)$	$e^{x+y}/(1+x)$
18	$\pi/6$	$\pi/2$	0	$1/\sin x$	$y \operatorname{ctg} x$
19	1	3	x	$2x$	$\ln(y/x)$
20	1	2	0	$1/x$	$x\sqrt{1+xy}$
21	0	1	0	$1+x$	$x+y^2$
22	1	1	0	\sqrt{x}	$x\sqrt{x}e^{xy}$
23	0	1	0	e^x	$(x+x^2)e^x \cos\left(\frac{\pi}{3e}xy\right)$
24	1	2	$1-x$	x	$\ln(x+y)/x$
25	1	$\sqrt{3}$	0	x^2	$1/\left[(1+x^2)(1+y)\sqrt{y}\right]$
26	1	2	$x/2$	x	$x/(x^2+y^2)$
27	1	2	x	$2x^2$	$2e^{y/x}$
28	$\pi/3$	$\pi/2$	0	x	$\cos(x+y)$
29	1	2	0	\sqrt{x}	$8x^2y \ln(1+xy^2)$
30	1	3	0	x	$1/\sqrt{1+e^{2y/x}}$

Ответы лабораторной работы

№ варианта	Ответ	№ варианта	Ответ
1	$93/120$	16	$5/12$
2	$3e/2 - 1$	17	$e^2 - e - 1$
3	$2 \ln 2 - 1,5 \ln 1,5 - 0,5$	18	$0,75$
4	$(-3e^2 + 24e - 43)/12$	19	$4(2 \ln 2 - 1)$
5	$\frac{10\sqrt{5}}{3} - \frac{8\sqrt{2}}{15} - 1$	20	$[2(2\sqrt{2} - 1)]/3$
6	$187/420$	21	$2\frac{1}{12}$
7	$1,5(e - 1)$	22	$[2(e - e^{1/8} - 7/8)]/3$
8	$2 \ln 2 - 1,5 \ln 1,5 - 0,5$	23	$(9e^2)/(2\pi^2)$
9	$10 \ln 2 - 3\frac{8}{9}$	24	$7 \ln 2 - 4$
10	$(3e^2 - 5)/12$	25	$7\pi^2/144$
11	$3\frac{5}{12}$	26	$\pi/4 - \text{arctg}(1/2)$
12	$e^2(e - 1)$	27	$e(3e^3 - e - 6)/2$
13	$0,75$	28	$-0,25$
14	$25 \ln 5 - 4 \ln 2 - 25,5$	29	$25 \ln 5 - 4 \ln 2 - 25,5$
15	$\frac{10\sqrt{5}}{3} - \frac{8\sqrt{2}}{15} - 1$	30	$4 \ln \left(\frac{(1 + \sqrt{2})e}{1 + \sqrt{1 + e^2}} \right)$

3. ЗАДАЧА КОШИ ДЛЯ ОБЫКНОВЕННЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

Постановка задачи. Требуется найти решение $u(x)$ задачи Коши

$$u' = f(x, u), \quad u(x_0) = u_0, \quad (3.1)$$

где $u' = du/dx$, x_0 и u_0 — заданные числа.

Из курса дифференциальных уравнений известно, что если функция $f(x, u)$ непрерывна в замкнутой прямоугольной области $G = \{|x - x_0| \leq A, |u - u_0| \leq B\}$ и удовлетворяет в этой области условию Липшица по аргументу u , то можно указать отрезок $|x - x_0| \leq \delta$, на котором задача Коши (3.1) имеет единственное решение. Если вдобавок функция $f(x, u)$ имеет непрерывные производные по обоим аргументам до k -го порядка включительно, то решение $u(x)$ имеет непрерывные производные до $(k + 1)$ -го порядка включительно. В ряде случаев задача Коши может быть решена аналитически, однако для большинства задач, представляющих практический интерес, такое решение найти невозможно. Поэтому, когда подобная задача встречается на практике, получают приближенное решение с помощью численных методов, в частности конечно-разностных методов.

3.1. Численные методы решения задачи Коши

При изучении численных методов для задачи Коши будем считать, что она имеет единственное решение в замкнутой прямоугольной области $D = \{a \leq x \leq b, c \leq u \leq d\}$. Пусть требуется найти решение задачи (3.1) на отрезке $[a, b]$. Введем на отрезке $[a, b]$ сетку ω_{h_i} следующим образом:

$$\omega_{h_i} = \{a = x_0 < x_1 < \dots < x_{n-1} < x_n = b\},$$

где точки x_i , $i = 0, 1, \dots, n$ называются узловыми точками, или узлами сетки, $h_i = x_i - x_{i-1}$, $i = 1, \dots, n$ — шагами сетки; n — натуральное число. Если $h_i = h = \text{const}$, то такую сетку будем обозначать ω_h и называть равномерной. Сетку ω_h можно задать так:

$$\omega_h = \{x_i = x_0 + ih, x_0 = a, h = (b - a)/n, i = 0, 1, \dots, n\}. \quad (3.2)$$

В этой главе в дальнейшем будем пользоваться равномерной сеткой ω_h с шагом h .

Пусть $u_i = u(x_i)$ — значение точного решения (3.1) в точке x_i , а y_i — соответствующее приближенное значение, полученное с помощью рассматриваемого численного метода.

3.1.1. Явный метод Эйлера

Предположим, что функция $f(x, u)$ в рассматриваемой области D имеет непрерывные частные производные $\partial f(x, u)/\partial x$ и $\partial f(x, u)/\partial u$. В таком случае, как отмечалось выше, решение задачи Коши (3.1) имеет непрерывную вторую производную

$$u''(x) = \frac{\partial f(x, u)}{\partial x} + \frac{\partial f(x, u)}{\partial u} f(x, u). \quad (3.3)$$

Явный метод Эйлера определяется формулами

$$y_{i+1} = y_i + hf(x_i, u_i), \quad i = 0, 1, \dots, n-1, \quad (3.4)$$

где $y_0 = u_0$.

Соотношения (3.4) метода Эйлера получают следующим образом. Функцию $u(x)$ разлагаем по формуле Тейлора в окрестности точки x_i :

$$\begin{aligned} u(x_{i+1}) &= u(x_i) + hu'(x_i) + \frac{h^2}{2} u''(\xi_i) = \\ &= u(x_i) + hf(x_i, u(x_i)) + \frac{h^2}{2} u''(\xi_i), \end{aligned} \quad (3.5)$$

где $\xi_i \in [x_i, x_{i+1}]$, $i = 0, 1, \dots, n-1$. Затем отбрасываем остаточный член и заменяем значения $u(x_i)$ на y_i .

На рис. 3.1 дана геометрическая интерпретация метода Эйлера. Изображены первые два шага метода, т. е. проиллюстрировано вычисление значений y_1 и y_2 при $x = x_1$ и $x = x_2$. Интегральные кривые a_0, a_1 и a_2 описывают точные решения уравнения $u' = f(x, u)$ с начальными условиями $u(x_0) = u_0 = y_0, u(x_1) = y_1$ и $u(x_2) = y_2$ соответственно. При этом кривая a_0 соответствует точному решению задачи Коши (3.1), так как она проходит через начальную точку $A_0(x_0, u_0)$. Точки A_1 и A_2 получены в результате численного решения задачи Коши методом Эйлера.

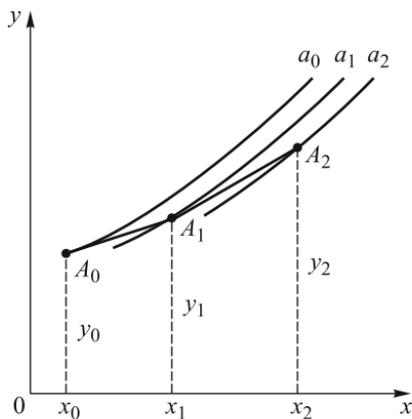


Рис. 3.1. Геометрическая интерпретация метода Эйлера

Их отклонение от кривой a_0 характеризует погрешность метода. Уже при выполнении первого шага мы фактически сразу попадаем на другую интегральную кривую. Отрезок A_0A_1 — отрезок касательной к кривой a_0 в точке A_0 . Тангенс угла наклона касательной A_0A_1 равен значению производной $u'_0 = f(x_0, u_0)$. Касательная A_1A_2 проводится уже к другой интегральной кривой a_1 . Таким образом, погрешность метода Эйлера приводит к тому, что на очередном шаге решение переходит на другую интегральную кривую.

Их отклонение от кривой a_0 характеризует погрешность метода. Уже при выполнении первого шага

мы фактически сразу попадаем на другую интегральную кривую. Отрезок A_0A_1 — отрезок касательной к кривой a_0 в точке A_0 . Тангенс угла наклона касательной A_0A_1 равен значению производной $u'_0 = f(x_0, u_0)$. Касательная A_1A_2 проводится уже к другой интегральной кривой a_1 . Таким образом, погрешность метода Эйлера приводит к тому, что на очередном шаге решение переходит на другую интегральную кривую.

Пример. Явным методом Эйлера решить задачу:

$$u' = u - x, \quad u(0) = -1.$$

Решение. Используя (3.4), получаем

$$y_0 = -1;$$

$$y_1 = y_0 + h(y_0 - x_0) = -1 - h;$$

$$y_2 = y_1 + h(y_1 - x_1) = -1 - h + h(-1 - h - h) = -1 - 2h - 2h^2;$$

$$y_3 = y_2 + h(y_2 - x_2) = -1 - 3h - 6h^2 - 2h^3$$

и т. д. С другой стороны, точным решением является функция $u(x) = 1 + x - 2e^x$. Сравним точное решение с полученным приближенным:

$$\begin{aligned} u_1 = u(h) &= 1 + h - 2e^h = 1 + h - 2 \left(1 + h + \frac{h^2}{2} e^{\xi_1} \right) = \\ &= -1 - h - h^2 e^{\xi_1}, \quad 0 < \xi_1 < h; \\ u_2 = u(2h) &= 1 + 2h - 2e^{2h} = 1 + 2h - 2 \left(1 + 2h + \frac{4h^2}{2} e^{\xi_2} \right) = \\ &= -1 - 2h - 4h^2 e^{\xi_2}, \quad 0 < \xi_2 < 2h. \end{aligned}$$

Аналогично

$$u_3 = u(3h) = -1 - 3h - 9h^2 e^{\xi_3}, \quad 0 < \xi_3 < 3h.$$

Видно, что численное решение отличается от точного на величину, содержащую члены второго порядка h^2 и выше, с коэффициентами, растущими с номером i . Ниже покажем, что ошибка в методе Эйлера всегда не превышает значения Ch , где C — постоянная, не зависящая от h .

Вообще главный вопрос для любого численного метода состоит в оценке точности приближенных значений y_i .

Определение 1. Локальной ошибкой вычислений при $x = x_i$ называется величина

$$\varepsilon_i = |u(x_i) - y_i|.$$

Эта ошибка зависит от приближенного метода, использованного при подсчете y_i , от функции $f(x, u)$ и точности вычислений. Поэтому говорят, что локальная ошибка зависит от методической ошибки $\varepsilon_i^{(m)}$ (т. е. от ошибки вычислений, связанной с методом нахождения приближенного решения) и ошибки округления (на практике все значения, полученные в результате вычислений, берутся с конечным числом знаков). Ошибку округления можно уменьшить, повышая точность арифметических вычислений, а методическая ошибка не зависит от точности вычислений, и поэтому за счет повышения точности вычислений ее устранить нельзя.

Иными словами, методическая ошибка совпадает с локальной ошибкой для абсолютно точно найденных значений y_i .

Определение 2. Глобальной методической ошибкой на отрезке $[a; b]$ называется величина

$$\varepsilon^{(m)} = \max_{1 \leq i \leq n} \varepsilon_i^{(m)}.$$

Для использования на практике пригодны лишь те методы численного решения, для которых

$$\varepsilon^{(m)} \rightarrow 0 \text{ при } h \rightarrow 0.$$

Определение 3. Численный метод решения задачи (3.1) называется методом k -го порядка точности, если

$$\varepsilon^{(m)} \rightarrow O(h^k) \text{ при } h \rightarrow 0,$$

или, иначе,

$$\varepsilon^{(m)} \leq Ch^k \text{ при } h \rightarrow 0, \quad (3.6)$$

где $C = \text{const} > 0$ зависит от $f(x, u)$, a , b и численного метода решения задачи (3.1), но не зависит от h .

Покажем, что метод Эйлера является методом первого порядка точности. Будем полагать, что арифметические вычисления проводятся точно, и поэтому локальная и методическая ошибки совпадают. Докажем следующее утверждение.

Лемма. Пусть при любом $i = 0, 1, \dots, n-1$ справедлива оценка

$$\varepsilon_{i+1} \leq (1 + c_1 h) \varepsilon_i + c_2 h^{k+1}, \quad (3.7)$$

где $h = (b-a)/n$; c_1 и c_2 — постоянные, не зависящие от h , $c_1 > 0$, $c_2 > 0$. Тогда соответствующий метод численного интегрирования задачи (3.1) является методом k -го порядка точности.

Доказательство. В соответствии с определением надо доказать оценку (3.6). Заметим, что

$$\varepsilon_0 = |u(x_0) - y_0| = |u(x_0) - u_0| = 0.$$

Из оценки (3.7) имеем

$$\varepsilon_{i+1} \leq (1 + c_1 h) \varepsilon_i + c_2 h^{k+1} \leq (1 + c_1 h)[(1 + c_1 h) \varepsilon_{i-1} + c_2 h^{k+1}] + c_2 h^{k+1} =$$

$$\begin{aligned}
&= (1 + c_1 h)^2 \varepsilon_{i-1} + c_2 h^{k+1} [1 + (1 + c_1 h)] \leq \dots \leq (1 + c_1 h)^{i+1} \varepsilon_0 + \\
&+ c_2 h^{k+1} [1 + (1 + c_1 h) + \dots + (1 + c_1 h)^i] = c_2 h^{k+1} \frac{(1 + c_1 h)^{i+1} - 1}{(1 + c_1 h) - 1}.
\end{aligned}$$

Заметим теперь, что

$$\begin{aligned}
(1 + c_1 h)^{i+1} &= \exp\{(i + 1) \ln(1 + c_1 h)\} \leq \exp\{(i + 1)c_1 h\} = \\
&= \exp\left\{c_1 \frac{b-a}{n} (i + 1)\right\} \leq e^{c_1(b-a)}.
\end{aligned}$$

С помощью этого последнего неравенства из предыдущей цепочки неравенств следует оценка

$$\varepsilon_{i+1} \leq \frac{[c_2(e^{c_1(b-a)} - 1)]}{c_1} h^k,$$

выполняющаяся для всех $i = 0, 1, \dots, n-1$. Сравнивая последнее неравенство с неравенством (3.6) и полагая $C = [c_2(e^{c_1(b-a)} - 1)]/c_1$, убеждаемся в справедливости леммы.

Теперь, в соответствии с леммой, чтобы доказать, что метод Эйлера является методом первого порядка точности, достаточно проверить неравенство

$$\varepsilon_{i+1} \leq (1 + c_1 h)\varepsilon_i + c_2 h^{k+1}$$

при всех $i = 0, 1, \dots, n-1$.

Вычитая (3.4) из равенств (3.5), получаем

$$u_{i+1} - y_{i+1} = u_i - y_i + h[f(x_i, u(x_i)) - f(x_i, y_i)] + \frac{h^2}{2} u''(\xi_i). \quad (3.8)$$

По теореме Лагранжа о конечном приращении функции имеем

$$f(x_i, u(x_i)) - f(x_i, y_i) = \frac{\partial f(x_i, \eta_i)}{\partial u} (u_i - y_i),$$

где точка η_i лежит между точками u_i и y_i .

С помощью последнего равенства из соотношения (3.8) находим оценку

$$\varepsilon_{i+1} \leq \varepsilon_i + c_1 h \varepsilon_i + c_2 h^2 = \varepsilon_i(1 + c_1 h) + c_2 h^2,$$

где

$$c_1 = \max_{(x,u) \in D} |f'_u(x,u)|, \quad c_2 = 0,5 \max_{(x,u) \in D} (|f'_x(x,u)| + |f'_u(x,u)| |f(x,u)|)$$

(см. формулу (3.3)).

Таким образом, доказано, что явный метод Эйлера имеет первый порядок точности.

3.1.2. Методы Рунге — Кутты

Рассмотрим теперь методы, погрешность которых при стремлении h к нулю убывает с более высокой скоростью.

Метод Рунге — Кутты второго порядка точности. Его расчетные формулы:

$$\begin{aligned} k_1 &= hf(x_i, y_i), \\ k_2 &= hf(x_i + h, y_i + k_1), \\ y_{i+1} &= y_i + \frac{1}{2}(k_1 + k_2), \quad i = 0, 1, \dots, n-1. \end{aligned} \tag{3.9}$$

Метод Рунге — Кутты четвертого порядка точности. Вычисления с помощью этого метода проводят по формулам:

$$\begin{aligned} k_1 &= hf(x_i, y_i), \\ k_2 &= hf\left(x_i + \frac{h}{2}, y_i + \frac{k_1}{2}\right), \\ k_3 &= hf\left(x_i + \frac{h}{2}, y_i + \frac{k_2}{2}\right), \\ k_4 &= hf(x_i + h, y_i + k_3), \\ y_{i+1} &= y_i + \frac{1}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4), \quad i = 0, 1, \dots, n-1. \end{aligned} \tag{3.10}$$

Мы рассмотрели методы, для которых при вычислении y_{i+1} нужно знать лишь значение y_i , а значения приближенного решения в предшествующих точках не входят в расчетные формулы. Иными словами, одношаговые методы — это методы с «короткой памятью». Если «память метода» получше, то его называют мно-

гошаговым. Более точно метод численного интегрирования задачи называть l -шаговым, если при вычислении значения y_{i+1} используют l величин $y_{i-l+1}, y_{i-l+2}, \dots, y_i, y_{i+1}$.

3.1.3. Многошаговые методы Адамса

Из (3.1) следует, что

$$u(x_{i+1}) - u(x_i) = \int_{x_i}^{x_{i+1}} u'(x) dx = \int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x, u(x)) dx \approx \int_{x_i}^{x_{i+1}} p(x) dx,$$

где $p(x)$ — полином, аппроксимирующий $f(x, u(x))$.

Пусть $f_i = f(x_i, y_i)$, где y_i — приближенное решение задачи (3.1), и в качестве $p(x)$ возьмем интерполяционный полином, проходящий через l ранее найденных точек (x_j, f_j) , ($j = (i-l+1), (i-l+2), (i-l+3), \dots, i$), включая текущую точку (x_i, f_i) . Если $l=1$, то имеем явный метод Эйлера (3.4). Если $l=2$, то $p(x)$ — линейная функция (рис. 3.2, а), проходящая через две точки (x_{i-1}, f_{i-1}) и (x_i, f_i) :

$$p(x) = \frac{(x_i - x)}{h} f_{i-1} + \frac{(x - x_{i-1})}{h} f_i, \quad p(x_{i-1}) = f_{i-1}, \quad p(x_i) = f_i.$$

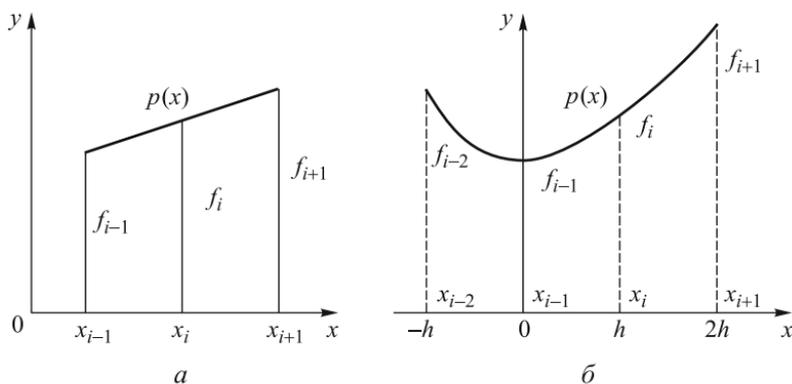


Рис. 3.2. Метод Адамса — Башфорда:

а — второго порядка точности; б — третьего порядка точности

Интегрируя полином от x_i до x_{i+1} , получаем двухшаговый метод Адамса второго порядка точности (он также называется методом Адамса — Башфорта):

$$y_{i+1} = y_i + \frac{h}{2}(3f_i - f_{i-1}). \quad (3.11)$$

Если $l = 3$, то $p(x)$ — парабола, проходящая через точки (x_{i-2}, f_{i-2}) , (x_{i-1}, f_{i-1}) и (x_i, f_i) (рис. 3.2, б), а соответствующий трехшаговый метод Адамса третьего порядка точности имеет вид

$$y_{i+1} = y_i + \frac{h}{12}(23f_i - 16f_{i-1} + 5f_{i-2}). \quad (3.12)$$

Формулу (3.12) легко получить, если перейти к новой системе координат, в которой координата x точки x_{i-1} равна нулю (см. рис. 3.2, б). Тогда

$$\begin{aligned} p(x) &= ax^2 + bx + c; \\ p(-h) &= ah^2 - bh + c = f_{i-2}, \\ p(0) &= c = f_{i-1}, \\ p(h) &= ah^2 + bh + c = f_i. \end{aligned}$$

Отсюда находим

$$p(x) = \frac{f_{i-2} - 2f_{i-1} + f_i}{2h^2} x^2 + \frac{f_i - f_{i-2}}{2h} x + f_{i-1}. \quad (3.13)$$

Интегрируя выражение (3.13) на отрезке $[h, 2h]$, получим формулу (3.12).

Если $l = 4$, то интерполяционный многочлен является кубическим и мы получаем формулу Адамса четвертого порядка точности:

$$y_{i+1} = y_i + \frac{h}{24}(55f_i - 59f_{i-1} + 37f_{i-2} - 9f_{i-3}). \quad (3.14)$$

Многошаговые методы требуют в начале работы знания значений в первых l точках: y_0, y_1, \dots, y_{l-1} . Мы не можем использовать, например, формулу (3.14) при $i < 3$. Выход из положения состоит в применении какого-либо одношагового метода того же порядка

точности, например метода Рунге — Кутты, до тех пор, пока не будет получено достаточное количество значений для проведения расчетов с помощью многошагового метода.

Примечание. Наряду с рассмотренными явными методами существуют и неявные методы интегрирования дифференциальных уравнений. Приведем два таких метода.

Неявный метод Эйлера. Это метод первого порядка точности. Его расчетная формула:

$$y_{i+1} = y_i + hf(x_{i+1}, y_{i+1}), \quad i = 0, 1, \dots, n-1. \quad (3.15)$$

Чтобы найти y_{i+1} , надо решить это уравнение (может быть, нелинейное) относительно этой переменной.

Метод трапеций. Это метод второго порядка точности. В результате решения уравнений

$$y_{i+1} = y_i + \frac{h}{2}[f(x_i, y_i) + f(x_{i+1}, y_{i+1})], \quad i = 0, 1, \dots, n-1 \quad (3.16)$$

находятся значения y_{i+1} .

3.1.4. Правило Рунге практической оценки погрешности

Это правило (см. гл. 1 и 2) применимо для практической оценки погрешности и при численном решении обыкновенных дифференциальных уравнений. Пусть $y_i^{(h)}$ — значение в точке x_i приближенного решения $y^{(h)}$ задачи Коши (3.1) на отрезке $[a, b]$, найденное с шагом h , где $x_i = a + ih$, $i = 0, 1, \dots, n$, n — число разбиений отрезка $[a, b]$, $h = (b-a)/n$. И пусть $y_i^{(h/2)}$ — значение в той же точке x_i , но приближенного решения $y^{(h/2)}$, найденное с шагом $h/2$, т. е. число разбиений в этом случае равно $2n$. Считается, что $y^{(h/2)}$ является решением задачи Коши (3.1) с погрешностью ε , если

$$\frac{|y_i^{(h/2)} - y_i^{(h)}|}{2^k - 1} < \varepsilon,$$

где $i = 1, 2, \dots, n$; k — порядок точности численного метода (например, $k = 1$ для метода Эйлера (3.4), $k = 4$ для метода Рунге — Кутты (3.10)).

Алгоритм вычислений. Допустим, что мы ищем численное решение задачи Коши (3.1) с помощью метода Рунге — Кутты четвертого порядка точности ($k = 4$). Опишем алгоритм вычислений, основанный на применении правила Рунге практической оценки погрешности. Численное решение находят методом итераций. Пусть l — номер итерации, y^l — численное решение, найденное с шагом h_l , где h_l — расчетный шаг на l -й итерации. Очередную итерацию осуществляют следующим образом. Рассчитывают y^{l+1} с шагом $h_{l+1} = h_l/2$.

После этого проверяют выполнение неравенства

$$\frac{|y_i^{l+1} - y_i^l|}{2^k - 1} < \varepsilon, \quad (3.17)$$

строго говоря, во всех общих точках x_i решений y^l и y^{l+1} .

Обычно выполнение неравенства (3.17) проверяют не во всех общих точках решений y^l и y^{l+1} , а только в выделенных *контрольных точках*. В качестве контрольных можно взять узловые точки $\{x_i^0\}$, соответствующие начальному числу разбиения n_0 с шагом h_0 : $x_i^0 = a + ih_0$, $i = 0, 1, \dots, n_0$, $h_0 = (b - a)/n_0$. Число n_0 (это целое число) определяется по формуле (см. (1.20) и (1.21))

$$n_0 = \left[\frac{b - a}{\sqrt[k]{\varepsilon}} \right] + 1. \quad (3.18)$$

где k — порядок точности метода; квадратные скобки, как и в (1.20) и (1.21), обозначают целую часть заключенного в них числа.

Примечание. Если $\frac{b - a}{\sqrt[k]{\varepsilon}} = \left[\frac{b - a}{\sqrt[k]{\varepsilon}} \right]$, т. е. если дробная часть числа $\frac{b - a}{\sqrt[k]{\varepsilon}}$ равняется нулю, то 1 в формуле (3.18) можно не прибавлять. Пусть, например, $k = 4$, $[a, b]$ есть отрезок $[0, 1]$, а $\varepsilon = 0,0001$. Понятно, что в этом случае в качестве n_0 можно взять число 10, а не 11 (как это следует из (3.18)), тогда $h_0 = 0,1$.

3.2. Интегрирование систем обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка

Рассмотрим задачу Коши для нормальной системы m обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка

$$\mathbf{u}' = f(x, \mathbf{u}), \quad \mathbf{u}(x_0) = \mathbf{u}_0, \quad (3.19)$$

где $\mathbf{u}' = d\mathbf{u}/dx$,

$$\mathbf{u}' = \begin{pmatrix} u_1'(x) \\ \vdots \\ u_m'(x) \end{pmatrix}, \quad \mathbf{u} = \begin{pmatrix} u_1(x) \\ \vdots \\ u_m(x) \end{pmatrix}, \quad \mathbf{f}(x, \mathbf{u}) = \begin{pmatrix} f_1(x, u_1, \dots, u_m) \\ \vdots \\ f_m(x, u_1, \dots, u_m) \end{pmatrix},$$

$\mathbf{u}_0 = \{u_{1,0}, \dots, u_{m,0}\}$, x_0 , $u_{i,0}$, $i = 1, \dots, m$ — заданные числа.

В случае задачи Коши (3.19) изложенные приближенные методы интегрирования Эйлера, Рунге — Кутты и Адамса формально остаются теми же, только функции u, f, y и коэффициенты k_i в формулах Рунге — Кутты (3.9) и (3.10) заменяются соответственно на вектор-функции \mathbf{u}, \mathbf{f} и векторы \mathbf{y} и \mathbf{k}_i . Правило Рунге применяется для каждой координаты вектора \mathbf{u} в отдельности.

Пусть, например, требуется найти на отрезке $[a, b]$ решение задачи Коши (3.19) для $m = 2$, записанной в виде

$$\begin{cases} u_1' = f_1(x_1, u_1, u_2), \\ u_2' = f_2(x_1, u_1, u_2), \end{cases} \quad \begin{cases} u_1(x_0) = u_{1,0}, \\ u_2(x_0) = u_{2,0}, \end{cases} \quad x_0 = a \quad (3.20)$$

или в векторной форме

$$\mathbf{u}' = f(x, \mathbf{u}), \quad \mathbf{u}(x_0) = \mathbf{u}_0, \quad m = 2, \quad (3.21)$$

где

$$\mathbf{u}' = \begin{pmatrix} u_1'(x) \\ u_2'(x) \end{pmatrix}, \quad \mathbf{u} = \begin{pmatrix} u_1(x) \\ u_2(x) \end{pmatrix}, \quad \mathbf{f}(x, \mathbf{u}) = \begin{pmatrix} f_1(x, u_1, u_2) \\ f_2(x, u_1, u_2) \end{pmatrix}, \quad \mathbf{u}_0 = \begin{pmatrix} u_{1,0} \\ u_{2,0} \end{pmatrix}.$$

Приведем для системы (3.21) расчетные формулы методов Рунге — Кутты второго и четвертого порядков точности (аналогичные формулам (3.9) и (3.10)) в векторной и координатной формах.

Расчетные формулы метода Рунге — Кутты второго порядка точности для системы (3.21):

$$\begin{aligned} \mathbf{k}_1 &= h\mathbf{f}(x_i, \mathbf{y}_i), \\ \mathbf{k}_2 &= h\mathbf{f}(x_i + h, \mathbf{y}_i + \mathbf{k}_1), \\ \mathbf{y}_{i+1} &= \mathbf{y}_i + \frac{1}{2}(\mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2), \quad i = 0, 1, \dots, n-1. \end{aligned} \quad (3.22)$$

В координатной форме формулы (3.22) запишутся так:

$$\begin{aligned} k_{1,1} &= hf_1(x_i, y_{1,i}, y_{2,i}), \\ k_{1,2} &= hf_2(x_i, y_{1,i}, y_{2,i}), \\ k_{2,1} &= hf_1(x_i + h, y_{1,i} + k_{1,1}, y_{2,i} + k_{1,2}), \\ k_{2,2} &= hf_2(x_i + h, y_{1,i} + k_{1,1}, y_{2,i} + k_{1,2}), \\ y_{1,i+1} &= y_{1,i} + \frac{1}{2}(k_{1,1} + k_{2,1}), \\ y_{2,i+1} &= y_{2,i} + \frac{1}{2}(k_{1,2} + k_{2,2}), \quad i = 0, 1, \dots, n-1. \end{aligned} \quad (3.23)$$

Расчетные формулы метода Рунге — Кутты четвертого порядка точности для системы (3.21):

$$\begin{aligned} \mathbf{k}_1 &= h\mathbf{f}(x_i, \mathbf{y}_i), \\ \mathbf{k}_2 &= h\mathbf{f}\left(x_i + \frac{h}{2}, \mathbf{y}_i + \frac{\mathbf{k}_1}{2}\right), \\ \mathbf{k}_3 &= h\mathbf{f}\left(x_i + \frac{h}{2}, \mathbf{y}_i + \frac{\mathbf{k}_2}{2}\right), \\ \mathbf{k}_4 &= h\mathbf{f}(x_i + h, \mathbf{y}_i + \mathbf{k}_3), \\ \mathbf{y}_{i+1} &= \mathbf{y}_i + \frac{1}{2}(\mathbf{k}_1 + 2\mathbf{k}_2 + 2\mathbf{k}_3 + \mathbf{k}_4), \quad i = 0, 1, \dots, n-1. \end{aligned} \quad (3.24)$$

Координатная форма формулы (3.24) имеет вид:

$$\begin{aligned} k_{1,1} &= hf_1(x_i, y_{1,i}, y_{2,i}), \\ k_{1,2} &= hf_2(x_i, y_{1,i}, y_{2,i}), \\ k_{2,1} &= hf_1\left(x_i + \frac{h}{2}, y_{1,i} + \frac{k_{1,1}}{2}, y_{2,i} + \frac{k_{1,2}}{2}\right), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
k_{2,2} &= hf_2 \left(x_i + \frac{h}{2}, y_{1,i} + \frac{k_{1,1}}{2}, y_{2,i} + \frac{k_{1,2}}{2} \right), \\
k_{3,1} &= hf_1 \left(x_i + \frac{h}{2}, y_{1,i} + \frac{k_{2,1}}{2}, y_{2,i} + \frac{k_{2,2}}{2} \right), \\
k_{3,2} &= hf_2 \left(x_i + \frac{h}{2}, y_{1,i} + \frac{k_{2,1}}{2}, y_{2,i} + \frac{k_{2,2}}{2} \right), \\
k_{4,1} &= hf_1 (x_i + h, y_{1,i} + k_{3,1}, y_{2,i} + k_{3,2}), \\
k_{4,2} &= hf_2 (x_i + h, y_{1,i} + k_{3,1}, y_{2,i} + k_{3,2}), \\
y_{1,i+1} &= y_{1,i} + \frac{1}{6} (k_{1,1} + 2k_{2,1} + 2k_{3,1} + k_{4,1}), \\
y_{2,i+1} &= y_{2,i} + \frac{1}{6} (k_{1,2} + 2k_{2,2} + 2k_{3,2} + k_{4,2}), \quad i = 0, 1, \dots, n-1.
\end{aligned} \tag{3.25}$$

Понятно, что вид формул в векторной форме (3.22) и (3.24) не зависит от количества уравнений m в системе (3.19).

3.3. Задание к лабораторной работе

Для дифференциального уравнения (или системы уравнений) из предложенного варианта необходимо:

1. Получить точное решение уравнения (системы уравнений) с заданными начальными условиями.

2. Написать программу численного интегрирования дифференциального уравнения (системы уравнений) методом Рунге — Кутты второго или четвертого порядка точности. Для оценки точности вычислений воспользоваться правилом Рунге.

3. Найти численное решение дифференциального уравнения (системы уравнений) с точностью $\varepsilon = 0,0001$ и оценить погрешность как максимум разности в узлах между точным решением и решением, полученным численным методом.

Оформите отчет по лабораторной работе. Он должен содержать описание использованного численного метода, результаты расчетов и текст программы. Варианты задачи Коши для обыкновенных дифференциальных уравнений первого и второго порядков и систем обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка, а также ответы к ним представлены в табл. 3.1–3.6.

Варианты задачи Коши для обыкновенного дифференциального уравнения первого порядка

№ варианта	Функция $f(x, u)$	Отрезок $[a, b]$		Начальное условие u_0
		a	b	
1	3	4	5	6
1	$-x/u$	0	1	2
2	$2u/x$	1	3	1
3	$-\frac{x}{1+x}u$	0	2	1
4	e^{x+u}	0	0,5	0
5	$\frac{u}{x \ln x} + \frac{1}{x}$	e	e^2	1
6	$-2xu + xe^{-x^2}$	0	2	1
7	$\frac{3u}{x} - x$	1	3	2
8	$-\operatorname{tg} xu + \frac{1}{\cos x}$	0	$\pi/3$	1
9	$\frac{2x}{1+x^2}u + 1 + x^2$	1	3	2
10	$2u + e^x - x$	0	1	1/4
11	$-2u + e^{3x}$	0	1	6/5
12	$-u/x + 2 \ln x + 1$	1	3	1
13	$\frac{2u}{1+x} + e^x(1+x)^2$	0	2	1
14	$\frac{u}{x} + x \cos x$	1	3	$\sin 1$
15	$u + e^x/x$	1	2	0
16	$(u+1)/x$	1	3	0
17	$e^{2x} - e^x u$	0	2	0
18	$(\sin x - u) \cos x$	0	π	0
19	$-1 + u/x$	1	3	0

№ варианта	Функция $f(x, u)$	Отрезок $[a, b]$		Начальное условие u_0
		a	b	
20	$-(x+u)/x$	1	3	1/2
21	$-u + \cos x$	0	π	1/2
22	$2u - x^2$	0	3	1/4
23	$-u + 2x$	0	3	-1
24	u/x	1	4	1
25	$u/(2x)$	1	4	1
26	$-2u + 4x$	0	2	0
27	$-\frac{u}{x} \ln\left(\frac{u}{x}\right)$	1	2	e^2
28	$2u/x$	1	3	2
29	$-\frac{x}{1+x}u$	0	2	2
30	$-x/u$	0	1	1

Таблица 3.2

**Ответы к вариантам задачи Коши
для обыкновенного дифференциального уравнения первого порядка**

№ варианта	Ответ	№ варианта	Ответ
1	$\sqrt{4-x^2}$	10	$e^{2x} - e^x + \frac{x}{2} + \frac{1}{4}$
2	x^2	11	$e^{-2x} + \frac{e^{3x}}{5}$
3	$(x+1)e^{-x}$	12	$x \ln x + 1/x$
4	$-\ln(2 - e^x)$	13	$(x+1)^2 e^x$
5	$(1 + \ln(\ln x)) \ln x$	14	$x \sin x$
6	$e^{-x^2} (1 + x^2/2)$	15	$e^x \ln x$
7	$x^2 + x^3$	16	$x - 1$
8	$\sin x + \cos x$	17	$e^x - 1$
9	$x(1 + x^2)$	18	$e^{-\sin x} + \sin x - 1$

№ варианта	Ответ	№ варианта	Ответ
19	$x \ln(1/x)$	25	\sqrt{x}
20	$\frac{1}{x} - \frac{x}{2}$	26	$e^{-2x} + 2x - 1$
21	$(\sin x + \cos x)/2$	27	xe^{1+x}
22	$(2x^2 + 2x + 1)/4$	28	$2x^2$
23	$e^{-x} + 2x - 2$	29	$2(x+1)e^{-x}$
24	x	30	$\sqrt{1-x^2}$

Таблица 3.3

**Варианты задачи Коши
для обыкновенного дифференциального уравнения второго порядка**

№ варианта	Функция			Отрезок $[a, b]$		Начальные условия	
	$p(x)$	$q(x)$	$g(x)$	a	b	A	B
1	-5	4	0	0	2	1	1
2	0	-1	e^x	0	1	3	3/2
3	-2	1	0	2	5	1	-2
4	0	1	$\cos x$	0	1	1	2
5	0	4	$4[\sin(2x) + \cos(2x)]$	π	2π	2π	2π
6	-4	3	e^{5x}	0	1	3	9
7	-2	0	$2e^x$	1	3	-1	0
8	-8	7	14	0	1	1	0
9	0	1	$4e^x$	0	π	4	-3
10	-1	0	$2(1-x)$	0	1	1	1
11	6	0	8	0	1	2	6
12	-2	2	$4e^x \cos x$	π	2π	πe^π	e^π
13	-5	0	7	0	1	1	3/5
14	0	1	$5 \sin(2x)$	0	1	1	2/3
15	-2	1	$3e^x$	0	1	2	3

**Ответы к вариантам задачи Коши
для обыкновенного дифференциального уравнения второго порядка**

№ варианта	Решение $u(x)$	№ варианта	Решение $u(x)$
1	e^x	9	$-5 \sin x + 2 \cos x + 2e^x$
2	$\left(2 + \frac{x}{2}\right)e^x + e^{-x}$	10	$x^2 + e^x$
3	$(7 - 3x)e^{x-2}$	11	$\frac{8}{3} + \frac{4}{3}x - \frac{2}{3}e^{-6x}$
4	$\left(2 + \frac{x}{2}\right)\sin x + \sin x$	12	$e^x[(2x - \pi - 1)\sin x - \pi \cos x]$
5	$3\pi \cos(2x) + \frac{h}{2}\sin(2x) + x[\sin(2x) - \cos(2x)]$	13	$\frac{3}{5} - \frac{7}{5}x + \frac{2}{5}e^{5x}$
6	$\frac{1}{8}e^x + \frac{11}{4}e^{3x} + \frac{1}{8}e^{5x}$	14	$4 \sin x + \cos x - \frac{5}{3}\sin(2x)$
7	$e^{2x-1} - 2e^x + e - 1$	15	$\left(2 + x + \frac{3}{2}x^2\right)e^x$
8	$2 - \frac{7}{6}e^x + \frac{1}{6}e^{7x}$		

Таблица 3.5

**Варианты задачи Коши для системы обыкновенных
дифференциальных уравнений первого порядка**

№ варианта	Функции		Отрезок $[a, b]$		Начальные условия	
	$f_1(x, u_1, u_2)$	$f_2(x, u_1, u_2)$	a	b	$u_{1,0}$	$u_{2,0}$
1	$-1/u_2$	$1/u_1$	0	2	1	2
2	$(u_2 - 1)/u_2$	$1/(u_1 - x)$	0	2	-1	1
3	$x/(u_1 u_2)$	x/u_1^2	0	2	1	1
4	$-u_2/x$	$-u_1/x$	1	3	2	0
5	$-2\frac{u_1}{x}$	$u_2 + (2+x)\frac{u_1}{x}$	1	3	1	$e - 1$
6	$u_1 + 3u_2$	$-u_1 + 5u_2$	0	3	3	1

№ варианта	Функции		Отрезок $[a, b]$		Начальные условия	
	$f_1(x, u_1, u_2)$	$f_2(x, u_1, u_2)$	a	b	$u_{1,0}$	$u_{2,0}$
7	$3u_1 - 2u_2 + x$	$3u_1 - 4u_2$	0	2	$2\frac{13}{18}$	$3\frac{11}{18}$
8	$u_1 - 5\cos x$	$2u_1 + u_2$	0	π	1	4
9	$2u_1 + u_2 + 2e^x$	$u_1 + 2u_2 - 3e^{4x}$	0	2	0	-2
10	$3u_1 + 2u_2 + 3e^{2x}$	$u_1 + 2u_2 + e^{2x}$	0	2	0	-2
11	$u_2 + \cos x$	$1 - u_1$	0	π	1	-0,5
12	$-5u_1 - u_2 + e^x$	$u_1 - 3u_2 + e^{2x}$	0	2	$\frac{119}{900}$	$\frac{211}{900}$
13	$-u_2 + \cos x$	$-u_1 + \sin x$	0	π	1	-1
14	$2u_1 - u_2$	$-u_1 + 2u_2 - 5e^x \sin x$	0	π	2	3
15	$2u_1 - 4u_2 + 4e^{-2x}$	$2u_1 - 2u_2$	-2	0	0	e^4

Таблица 3.6

Ответы к вариантам задачи Коши для системы обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка

№ варианта	$u_1(x)$	$u_2(x)$
1	$e^{-x/2}$	$2e^{x/2}$
2	$x - e^x$	e^{-x}
3	$\left(\frac{3}{2}x^2 + 1\right)^{1/3}$	$\left(\frac{3}{2}x^2 + 1\right)^{1/3}$
4	$x + 1/x$	$-x + 1/x$
5	$1/x^2$	$e^x - 1/x^2$
6	$3e^{2x}$	e^{2x}
7	$2e^{2x} + e^{-3x} - \frac{2}{3}x - \frac{5}{18}$	$e^{2x} + 3e^{-3x} - \frac{x}{2} - \frac{1}{12}$

№ варианта	$u_1(x)$	$u_2(x)$
8	$e^{-x} + e^{2x} - 2 \sin x - \cos x$	$-e^{-x} + 2e^{2x} + \sin x + 3 \cos x$
9	$e^{3x} + xe^{2x} - e^{4x}$	$e^{3x} - (1+x)e^{2x} - 2e^{4x}$
10	$e^x - e^{2x}$	$-e^x - e^{2x}$
11	$1 + \frac{x}{2} \cos x$	$-\frac{x}{2} \sin x - \frac{1}{2} \cos x$
12	$\frac{4}{25}e^x - \frac{1}{36}e^{2x}$	$\frac{1}{25}e^x + \frac{7}{36}e^{2x}$
13	$\sin x + e^x$	$-e^x$
14	$e^x(2 \cos x - \sin x)$	$e^x(3 \cos x + \sin x)$
15	0	e^{-2x}

Задача Коши для дифференциального уравнения второго порядка

$$\begin{aligned} u'' + p(x)u' + q(x)u &= g(x), \\ u(x_0) &= A, \quad u'(x_0) = B, \\ x &\in [a, b], \quad x_0 = a \end{aligned} \quad (3.26)$$

решается сведением к задаче Коши для системы дифференциальных уравнений первого порядка.

Пусть $u_1(x) = u(x)$, а $u_2(x) = u'(x)$. Тогда для $u_1(x)$ и $u_2(x)$ из (3.26) получаем следующую задачу Коши:

$$\begin{cases} u_1' = u_2, \\ u_2' = g(x) - q(x)u_1 - p(x)u_2, \end{cases} \quad \begin{cases} u_1(x_0) = A, \\ u_2(x_0) = B. \end{cases} \quad (3.27)$$

Постановка задачи Коши и расчетные формулы для системы, состоящей из двух обыкновенных дифференциальных уравнений, приведены выше (см. (3.20)–(3.25)).

4. КРАЕВАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ ЛИНЕЙНОГО ОБЫКНОВЕННОГО ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ ВТОРОГО ПОРЯДКА

Постановка задачи. Требуется найти функцию $u(x)$, которая является решением следующей краевой задачи:

$$u'' + p(x)u' + q(x)u = f(x), \quad a < x < b, \quad (4.1)$$

$$u(a) = A, \quad u(b) = B. \quad (4.2)$$

Задачу (4.1), (4.2) называют краевой, поскольку дополнительные условия (4.2) задаются на концах отрезка $[a, b]$.

4.1. Численные методы решения краевой задачи

4.1.1. Разностная аппроксимация производных

Введем на отрезке $[a, b]$ равномерную сетку ω_h (3.2). Записывая уравнение (4.1) во внутренних узлах сетки ω_h , получим $(n-1)$ -е уравнение для определения $3(n-1)$ неизвестных u_i, u'_i и u''_i :

$$u''_i + p_i u'_i + q_i u_i = f_i, \quad i = 1, 2, \dots, (n-1), \quad (4.3)$$

где

$$u_i = u(x_i), \quad u'_i = u'(x_i), \quad u''_i = u''(x_i), \quad p_i = p(x_i), \quad q_i = q(x_i), \quad f_i = f(x_i).$$

Для того чтобы получить замкнутую систему уравнений относительно u_i , необходимо первые и вторые производные функции $u(x)$ в узловых точках выразить через значения $u(x)$ в этих точках. Будем предполагать, что функция $u(x)$ имеет все необходимые по ходу рассуждения непрерывные производные. Выразим значения u_{i+1} и u_{i-1} по формуле Тейлора, беря точку x_i в качестве точки разложения:

$$\begin{aligned}
 u_{i+1} &= u_i + hu'_i + \frac{h^2}{2!} u''_i + \frac{h^3}{3!} u'''_i + O(h^4), \\
 u_{i-1} &= u_i - hu'_i + \frac{h^2}{2!} u''_i - \frac{h^3}{3!} u'''_i + O(h^4).
 \end{aligned}
 \tag{4.4}$$

Отсюда, учитывая свойства величины $O(hk)$ (см. гл. 1), можно получить следующие выражения для точного значения первой производной функции $u(x)$ в точке x_i :

$$\begin{aligned}
 u'_i &= \frac{u_{i+1} - u_i}{h} + O(h), \\
 u'_i &= \frac{u_i - u_{i-1}}{h} + O(h), \\
 u'_i &= \frac{u_{i+1} - u_{i-1}}{2h} + O(h^2),
 \end{aligned}
 \tag{4.5}$$

а также выражение для точного значения второй производной функции $u(x)$ в той же точке x_i :

$$u''_i = \frac{u_{i-1} - 2u_i + u_{i+1}}{h^2} + O(h^2).
 \tag{4.6}$$

Отношения

$$\frac{u_{i+1} - u_i}{h}, \quad \frac{u_i - u_{i-1}}{h}, \quad \frac{u_{i+1} - u_{i-1}}{2h}$$

в (4.5) называются *правой разностной производной*, *левой разностной производной* и *центральной разностной производной* соответственно. Отношение

$$\frac{u_{i-1} - 2u_i + u_{i+1}}{h^2}$$

в (4.6) называется *второй разностной производной*.

Из (4.5) следует, что левая и правая разностные производные аппроксимируют производную $u'(x)$ с первым порядком точности относительно шага h , а центральная разностная производная — со вторым порядком точности относительно h . Из (4.6) следует, что вторая разностная производная аппроксимирует производную $u''(x)$ со вторым порядком точности относительно h .

4.1.2. Решение задачи методом прогонки

Пусть, как и ранее, y_i — приближенное значение, соответствующее точному значению u_i функции $u(x)$ в точке x_i . Заменим u_i'' и u_i' в (4.3) второй разностной производной и первой центральной разностной производной соответственно, подставляя в них вместо u_i величины y_i . В результате вместо дифференциальной задачи (4.1), (4.2) получим следующую *разностную задачу*:

$$\frac{y_{i-1} - 2y_i + y_{i+1}}{h^2} + p_i \frac{y_{i+1} - y_{i-1}}{2h} + q_i y_i = f_i, \quad (4.7)$$
$$i = 1, 2, \dots, (n-1),$$

$$y_0 = A, \quad y_n = B. \quad (4.8)$$

Подставляя краевые условия (4.8) в (4.7), получим относительно значений y_i , $i = 1, 2, \dots, (n-1)$ систему линейных алгебраических уравнений $(n-1)$ -го порядка с трехдиагональной матрицей:

$$(h^2 q_1 - 2)y_1 + \left(1 + \frac{h}{2} p_1\right) y_2 = h^2 f_1 - A \left(1 - \frac{h}{2} p_1\right);$$
$$\left(1 - \frac{h}{2} p_i\right) y_{i-1} + (h^2 q_i - 2)y_i + \left(1 + \frac{h}{2} p_i\right) y_{i+1} = h^2 f_i, \quad (4.9)$$
$$i = 2, \dots, (n-1);$$

$$\left(1 - \frac{h}{2} p_{n-1}\right) y_{n-2} + (h^2 q_{n-1} - 2)y_{n-1} = h^2 f_{n-1} - B \left(1 + \frac{h}{2} p_{n-1}\right).$$

Система (4.9) решается методом прогонки.

4.1.3. Решение задачи методом стрельбы

Идея метода. Как известно из курса дифференциальных уравнений, общее решение (4.1) записывается в виде

$$u(x) = u_0(x) + c_1 u_1(x) + c_2 u_2(x), \quad (4.10)$$

где $u_0(x)$ — частное решение (4.1), а $u_1(x)$ и $u_2(x)$ — линейно независимые частные решения соответствующего (4.1) однородного уравнения

$$u'' + p(x)u' + q(x)u = 0. \quad (4.11)$$

Краевые условия (4.2), используя (4.10), можно представить в виде

$$\begin{aligned} u_0(a) + c_1 u_1(a) + c_2 u_2(a) &= A, \\ u_0(b) + c_1 u_1(b) + c_2 u_2(b) &= B. \end{aligned} \quad (4.12)$$

Пусть $u_0(x)$ — такое частное решение (4.1), что $u_0(a) = A$, а частные решения $u_1(x)$ и $u_2(x)$ уравнения (4.11) пусть удовлетворяют условиям $u_1(a) = 0$ и $u_2(a) \neq 0$ соответственно. Тогда из первого уравнения (4.12) следует равенство

$$A + c_1 \cdot 0 + c_2 u_2(a) = A,$$

т. е. $c_2 = 0$, а выражение (4.10) приобретает вид

$$u(x) = u_0(x) + c_1 u_1(x). \quad (4.13)$$

Константу c_1 находим из второго краевого условия (4.12): $u(b) = u_0(b) + c_1 u_1(b) = B$. Следовательно, $c_1 = (B - u_0(b))/u_1(b)$. Будем считать, что $u_1(b) \neq 0$. Описанный способ решения задачи называют *методом стрельбы*, или *методом пристрелки*.

Реализация метода. Итак, в соответствии с (4.13), для приближенного решения $y(x)$ в узлах равномерной сетки ω_h можем записать

$$y_i = y_{0,i} + c_1 y_{1,i}, \quad i = 0, 1, \dots, n. \quad (4.14)$$

Будем искать такие численные решения $y_{0,i}$ и $y_{1,i}$, для которых в нулевом и первом узлах сетки ω_h выполняются следующие условия:

$$y_{0,0} = A, \quad y_{0,1} = D_0, \quad (4.15)$$

$$y_{1,0} = 0, \quad y_{1,1} = D_1 \neq 0, \quad (4.16)$$

где D_0 и D_1 — константы.

Формально алгоритм применим при произвольных значениях D_0 и D_1 ($D_1 \neq 0$), однако с целью уменьшения влияния вычислительной погрешности рекомендуется брать $D_0 = A + O(h)$ и $D_1 = O(h)$.

Записываем для $y_{0,i}$ и $y_{1,i}$ разностные уравнения, соответствующие неоднородному (4.1) и однородному (4.11) уравнениям:

$$\frac{y_{0,i-1} - 2y_{0,i} + y_{0,i+1}}{h^2} + p_i \frac{y_{0,i+1} - y_{0,i-1}}{2h} + q_i y_{0,i} = f_i;$$

$$\frac{y_{1,i-1} - 2y_{1,i} + y_{1,i+1}}{h^2} + p_i \frac{y_{1,i+1} - y_{1,i-1}}{2h} + q_i y_{1,i} = 0, \quad i = 1, \dots, (n-1).$$

Отсюда находим выражения для $y_{0,i+1}$ и $y_{1,i+1}$:

$$y_{0,i+1} = \frac{h^2 f_i - \left(1 - \frac{h}{2} p_i\right) y_{0,i-1} - (h^2 q_i - 2) y_{0,i}}{1 + \frac{h}{2} p_i}; \quad (4.17)$$

$$y_{1,i+1} = \frac{-\left(1 - \frac{h}{2} p_i\right) y_{0,i-1} - (h^2 q_i - 2) y_{1,i}}{1 + \frac{h}{2} p_i}, \quad i = 1, \dots, (n-1).$$

Заданные значения (4.15) и (4.16) позволяют по формулам (4.17) найти последовательно решения $y_0(x)$ и $y_1(x)$ во всех оставшихся узлах x_i $i = 2, \dots, n$. Постоянную c_1 находим по формуле: $c_1 = (B - y_{0,n})/y_{1,n}$. Однако может оказаться так, что $y_{1,n} = 0$. Поскольку выбор констант D_0 и D_1 в (4.15) и (4.16) находится в распоряжении вычислителя, то, меняя значение D_1 в (4.16), можно найти решение $y_1(x)$, для которого $y_{1,n} \neq 0$. Решение всей задачи (4.1), (4.2) находится по формуле (4.14).

4.2. Задание к лабораторной работе

Для предложенного варианта лабораторной работы решить краевую задачу либо методом прогонки, либо методом стрельбы. Для задания краевого условия в точке b предварительно решить аналитически соответствующую задачу Коши:

$$\begin{aligned} u'' + p(x)u' + q(x)u &= f(x); \\ u(x_0) &= A, \quad u(x_0) = C; \\ x &\in [a, b], \quad x_0 = a. \end{aligned}$$

Значение B находится подстановкой точки b в точное решение $u(x)$ задачи Коши: $B = u(b)$. Варианты задачи Коши приведены в табл. 4.1. Значения a и b во всех вариантах равны 0 и 1, соответственно, $[a, b] = [0, 1]$.

Таблица 4.1

Варианты задачи Коши для линейного обыкновенного дифференциального уравнения второго порядка

№ варианта	Функции			Начальные условия	
	$p(x)$	$q(x)$	$f(x)$	A	C
1	-2	2	$e^x \sin x$	2	3/2
2	-7	12	5	1	2
3	2	2	xe^{-x}	0	0
4	-2	2	x^2	0,5	0
5	-8	16	e^{4x}	0	1
6	0	-1	$2e^x - x^2$	2	1
7	0	4	8	3	4
8	-1	0	$\text{ch}(2x)$	0	0
9	-2	0	$e^x(x^2 + x - 3)$	2	2
10	0	1	$4e^x$	4	-3
11	0	-1	$2 - x^2$	1	1
12	0	4	e^{-2x}	0	0
13	-4	0	$6x^2 + 1$	0	3,5625
14	0	-4	$16xe^{2x}$	0	3
15	1	-2	$-2x + 1$	1	-1
16	-6	8	10	1	2
17	-2	2	$2x$	0	1
18	0	4	$\sin(2x) + 1$	0,25	0
19	-3	2	$2\sin x$	0	-0,2
20	0	-1	$2\text{sh } x$	0	1
21	1	-2	$\cos x - 3\sin x$	1	2
22	-1	0	3	6	2
23	0	4	$\sin x$	1	1
24	0	4	e^x	1	3
25	-1	-6	2	1	0
26	-8	7	14	1	5

Окончание табл. 4.1

№ варианта	Функции			Начальные условия	
	$p(x)$	$q(x)$	$f(x)$	A	C
27	0	9	$6\cos(3x)$	1	3
28	4	4	$5e^{-2x}$	1	2
29	0	4	$3\sin(2x)$	2	0,75
30	0	1	$4xe^x$	-2	0

5. ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ ОПТИМИЗАЦИИ

К минимизации функций сводятся многие задачи управления отраслями промышленности, сельского хозяйства, транспорта, распределения ресурсов и других областей жизни общества.

Решение задач оптимизации складывается из следующих элементов:

- 1) создание математической модели явления;
- 2) определение целевой функции и важнейших параметров, подлежащих оптимизации;
- 3) непосредственная минимизация некоторой функции обычно большого числа переменных;
- 4) внедрение результатов исследования.

5.1. Одномерная оптимизация

Определение. Функция $F(x)$ называется унимодальной на отрезке $[a, b]$, если она имеет на этом отрезке единственный экстремум.

Будем считать, что это минимум, в противном случае рассмотрим $-F(x)$.

Пусть $F^* = \min_{[a,b]} F(x) = F(x^*)$, где x^* — точка минимума.

Утверждение. Если функция унимодальна на некотором интервале, то по значениям функции $F(x)$ в любых двух точках $x_1, x_2 \in [a, b]$ можно указать интервал, в котором заключен минимум x^* (интервал неопределенности), причем этот интервал меньше, чем первоначальный (рис. 5.1):

- а) если $F(x_1) > F(x_2)$, то $x^* \in [x_1, b]$;
- б) если $F(x_1) < F(x_2)$, то $x^* \in [a, x_2]$;
- в) если $F(x_1) = F(x_2)$, то $x^* \in [x_1, x_2]$.

Пользуясь утверждением, перейдем теперь к конкретным методам одномерной оптимизации.

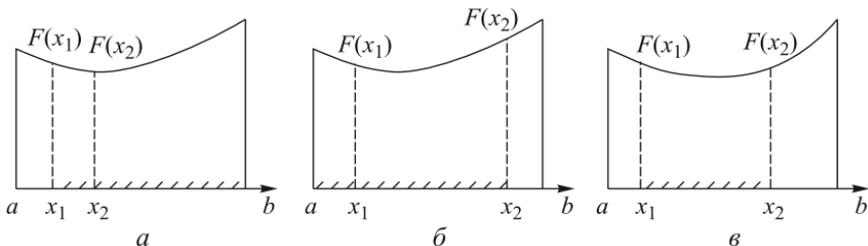


Рис. 5.1. Сужение интервала неопределенности для унимодальной функции:
 a — $F(x_1) > F(x_2)$; b — $F(x_1) < F(x_2)$; $в$ — $F(x_1) = F(x_2)$

Метод дихотомий (половинного деления). В условиях, когда на k -м шаге проводятся два опыта, аргументы $x_{1,k}$ и $x_{2,k}$ должны выбираться на расстоянии $\delta/2$ справа и слева от середины интервала:

$$x_{1,k} = \frac{a_k + b_k}{2} - \frac{\delta}{2}; \quad x_{2,k} = \frac{a_k + b_k}{2} + \frac{\delta}{2},$$

где a_k , b_k — границы интервала неопределенности; $c_k = a_k + b_k/2$ (рис. 5.2).

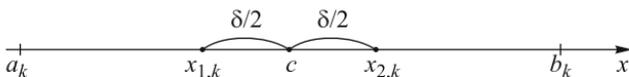


Рис. 5.2. Метод дихотомий

Если $F(x_{1,k}) > F(x_{2,k})$, то $a_{k+1} = x_{1,k}$, $b_{k+1} = b_k$;

если $F(x_{1,k}) < F(x_{2,k})$, то $a_{k+1} = a_k$, $b_{k+1} = x_{2,k}$;

если $F(x_{1,k}) = F(x_{2,k})$, то $a_{k+1} = x_{1,k}$, $b_{k+1} = x_{2,k}$.

Оценим (сверху) длину интервала неопределенности $l(n)$ после n шагов:

$$l(1) = \frac{b-a}{2} + \frac{\delta}{2} = (b-a) \cdot 2^{-1} + \delta \cdot 2^{-1};$$

$$l(2) = (l(1) + \delta)/2 = (b-a) \cdot 2^{-2} + \delta \cdot 2^{-2} + \delta \cdot 2^{-1};$$

$$l(3) = (l(2) + \delta)/2 = (b-a) \cdot 2^{-3} + \delta \cdot 2^{-3} + \delta \cdot 2^{-2} + \delta \cdot 2^{-1} = \\ = (b-a) \cdot 2^{-3} + \delta(1 - 2^{-3});$$

.....

$$l(n) = (b-a) \cdot 2^{-n} + \delta(1 - 2^{-n}).$$

Рассмотрим *метод золотого сечения*.

Определение. Говорят, что точка y_k осуществляет золотое сечение отрезка $[a_k, b_k]$ (рис. 5.3), если

$$\frac{b_k - a_k}{b_k - y_k} = \frac{b_k - y_k}{y_k - a_k}.$$



Рис. 5.3. Золотое сечение отрезка $[a_k, b_k]$

Другими словами, золотое сечение — это деление отрезка на две части таким образом, что большая его часть является средним геометрическим между всем отрезком и меньшей его частью.

Термин «золотое сечение» ввел Леонардо да Винчи (конец XV в.). Золотое сечение или близкие ему пропорциональные отношения легли в основу композиционного построения многих произведений мирового искусства (главным образом, в архитектуре античности и Возрождения, например, капелла Пацци во Флоренции, архитектор Ф. Брунеллески, XV в.).

Вычислим, чему равно отношение длины большей части отрезка l'_k к длине всего отрезка:

$$\frac{l}{l'} = \frac{l'}{l - l'}.$$

Отсюда

$$\varphi = \frac{l'}{l} = \frac{\sqrt{5} - 1}{2} \approx 0,62.$$

Число $\varphi = \frac{\sqrt{5} - 1}{2}$ называется золотым сечением.

В методе золотого сечения делим интервал неопределенности на три части (рис. 5.4). Точки $x_{1,k}$ и $x_{2,k}$ осуществляют золотое сечение отрезка $[a_k, b_k]$:

$$x_{1,k} = a_k + (1 - \varphi)(b_k - a_k);$$

$$x_{2,k} = b_k - (1 - \varphi)(b_k - a_k).$$



Рис. 5.4. Пример золотого сечения отрезка

Можно показать, что точки $x_{1,k}$ и $x_{2,k}$ являются золотым сечением отрезков $[a_k, x_{2,k}]$ и $[x_{1,k}, b_k]$ соответственно и, следовательно, одна из двух точек $x_{1,k}$ или $x_{2,k}$ используется и на следующем шаге, что уменьшает количество вычислений.

Пример. Пусть $F(x) = (x-1)^2$. Несмотря на очевидность результата, будем сужать интервал неопределенности:

$$a_1 = 0; \quad b_1 = 3;$$

$$x_{1,1} = 0 + 0,38(3-0) = 1,14; \quad x_{2,1} = 3 - 0,38(3-0) = 1,86;$$

$$F(x_{1,1}) = 0,14^2 = 0,0196; \quad F(x_{2,1}) = 0,86^2 > F(x_{1,1});$$

$$a_2 = a_1 = 0; \quad b_2 = x_{2,1} = 1,86;$$

$$x_{1,2} = a_2 + 0,38(1,86-0) = 0,7128; \quad x_{2,2} = x_{1,1} = 1,14;$$

$$F(x_{1,2}) = 0,29^2 > F(x_{2,2}).$$

Следовательно, $a_3 = x_{1,2} = 0,7128$; $b_3 = b_2 = 1,86$ и т. д.

5.2. Многомерная оптимизация

Требуется найти

$$\min_{x_1, x_2, \dots, x_n} F(x_1, x_2, \dots, x_n).$$

Для простоты рассуждений далее будем рассматривать функцию $F(x, y)$ двух переменных.

5.2.1. Метод покоординатного спуска

Выберем начальное приближение (x_0, y_0) (рис. 5.5). Фиксируем значение координаты $y = y_0$, тогда $F(x, y)$ будет зависеть только от переменной x , обозначим ее $f_1(x) = F(x, y_0)$.

Используя описанные выше методы одномерной оптимизации, найдем минимум функций одной переменной $f_1(x)$ и обозначим его x_1 . Мы сделали шаг из точки (x_0, y_0) в точку (x_1, y_0) по направлению, параллельному оси OX , на этом шаге значение функции уменьшилось. Затем из новой точки делаем спуск по направлению, параллельному оси OY , т. е. рассмотрим функцию $f_2(y) = F(x_1, y)$, найдем ее минимум и обозначим его y_1 . Приход в точку (x_1, y_1) завершает цикл спусков. Будем повторять циклы.

Утверждение. Если функция $F(x, y)$ гладкая, то в некоторой окрестности минимума процесс спуска по координатам сходится к этому минимуму.

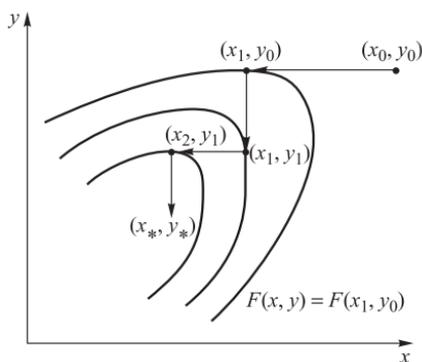


Рис. 5.5. Метод покоординатного спуска

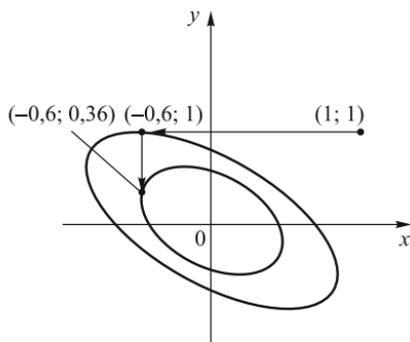


Рис. 5.6. Пример нахождения минимума функции $F(x, y)$ методом покоординатного спуска

Пример. Пусть $F(x, y) = 4(x, y)^2 + (x - y)^2 = 5x^2 + 6xy + 5y^2$ (рис. 5.6);

$$x_0 = 1; \quad y_0 = 1;$$

$$f_1(x) = 5x^2 + 6x + 5; \quad f'_1(x_1) = 10x_1 + 6 = 0; \quad x_1 = -0,6;$$

$$f_2(y) = x_1^2 + 6(x_1)y + 5y^2;$$

$$f'_2(y_1) = 10y_1 + 6x_1 = 0; \quad y_1 = -0,6x_1 = 0,36$$

и т. д.

5.2.2. Метод наискорейшего (градиентного) спуска

В этом методе следующее приближение отыскивается в виде

$$\mathbf{x}^{n+1} = \mathbf{x}^n - \delta_n \text{grad } F(\mathbf{x}^n).$$

Значение δ_n определяется из условия

$$\min_{\delta_n} F(\mathbf{x}^n - \delta_n \text{grad } F(\mathbf{x}^n)),$$

т. е. алгоритм состоит в последовательной минимизации функции одной переменной δ_n .

Пример. Пусть $F(x_1, x_2) = x_1^2 + 4x_2^2$ (рис. 5.7);

$$x_1^0 = 2; \quad x_2^0 = 1;$$

$$\text{grad } F(x_1, x_2) = (2x_1, 8x_2);$$

$$\text{grad } F(2, 1) = (4, 8);$$

$$\mathbf{x}^1(\delta_0) = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} - \delta_0 \begin{pmatrix} 4 \\ 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 - 4\delta_0 \\ 1 - 8\delta_0 \end{pmatrix}.$$

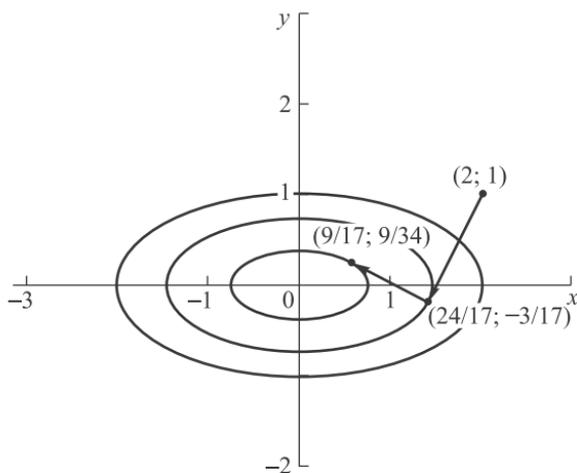


Рис. 5.7. Метод наискорейшего (градиентного) спуска

Найдем

$$\min_{\delta} \phi(\delta),$$

где

$$\begin{aligned}\phi(\delta_0) &= (2 - 4\delta_0)^2 + 4(1 - 8\delta_0)^2; \\ \phi'(\delta_0) &= 2(2 - 4\delta_0)(-4) + 8(1 - 8\delta_0)(-8) = 0; \quad \delta_0 = \frac{5}{34}.\end{aligned}$$

Отсюда

$$x_1^1 = \frac{24}{17}; \quad x_2^1 = -\frac{3}{17}$$

и т. д.

5.2.3. Метод сопряженных градиентов

До сих пор в итерационной процедуре в качестве направления убывания функции $F(\mathbf{x})$ мы использовали направление антиградиента: $\mathbf{p}^k = -\text{grad } F(\mathbf{x}^k)$. Однако такой выбор направления не всегда бывает удачным. В частности, для плохо обусловленных задач минимизации направление антиградиента в точке \mathbf{x}^k может значительно отличаться от направления к точке минимума \mathbf{x}^* . В результате траектория приближения к точке минимума будет иметь зигзагообразный характер (см. рис. 5.7). Метод сопряженных градиентов лишен этого недостатка.

Определение. Ненулевые векторы $\mathbf{p}^1, \mathbf{p}^2, \dots, \mathbf{p}^k$ называются сопряженными относительно матрицы A размеров $(n \times n)$, или A -ортогональными, если

$$(A\mathbf{p}^i, \mathbf{p}^j) = 0, \quad i \neq j; \quad i, j = 1, \dots, k. \quad (5.1)$$

Рассмотрим минимизацию в R^n квадратичной функции $F(\mathbf{x}) = \frac{1}{2}(A\mathbf{x}, \mathbf{x}) + (\mathbf{b}, \mathbf{x}) + c$ с положительно определенной матрицей A с помощью итерационного процесса

$$\begin{aligned}\mathbf{x}^{k+1} &= \mathbf{x}^k + \alpha_k \mathbf{p}^k, \quad k = 0, 1, \dots, \quad \mathbf{x}^0 \in R^n; \\ \mathbf{p}^0 &= -\text{grad } F(\mathbf{x}^0),\end{aligned} \quad (5.2)$$

где векторы \mathbf{p}^k A -ортогональны, а величина шага α_k определяется из условия исчерпывающего спуска по направлению \mathbf{p}^k .

После вычисления очередной точки \bar{x}^{k+1} , $k = 0, 1, \dots$ новое направление поиска \mathbf{p}^{k+1} находят по формуле

$$\mathbf{p}^{k+1} = -\text{grad } F(\mathbf{x}^k) + \beta_k \mathbf{p}^k, \quad k = 0, 1, \dots, \quad (5.3)$$

где коэффициенты β_k выбирают так, чтобы при минимизации квадратичной функции $F(\mathbf{x})$ с положительно определенной матрицей A получилась последовательность A -ортогональных векторов $\mathbf{p}^0, \mathbf{p}^1, \dots$.

Из условия $(A\mathbf{p}^{k+1}, \mathbf{p}^k) = 0$ имеем

$$\beta_k = \frac{A(\text{grad } F(\mathbf{p}^{k+1}), \mathbf{p}^k)}{(A\mathbf{p}^k, \mathbf{p}^k)}. \quad (5.4)$$

Для квадратичной функции шаг исчерпывающего спуска по направлению \mathbf{p}^k равен

$$\alpha_k = -\frac{(\text{grad } F(\mathbf{x}^k), \mathbf{p}^k)}{(A\mathbf{p}^k, \mathbf{p}^k)}. \quad (5.5)$$

Можно показать, что описанный процесс минимизации (см. (5.2)–(5.5)) квадратичной функции с положительно определенной симметричной матрицей A дает точки $\mathbf{x}^0, \mathbf{x}^1, \dots, \mathbf{x}^k$ и векторы $\mathbf{p}^0, \dots, \mathbf{p}^k$, такие, что если $\text{grad } F(\mathbf{x}^i) \neq 0$ при $0 \leq i < k \leq n-1$, то векторы $\mathbf{p}^0, \dots, \mathbf{p}^k$ A -ортогональны, а градиенты $\text{grad } F(\mathbf{x}^0), \dots, \text{grad } F(\mathbf{x}^i)$ взаимно ортогональны.

Обращение градиента в нуль в очередной точке \mathbf{x}^k итерационного процесса свидетельствует о достижении точки глобального минимума. Рассматриваемый метод гарантирует нахождение точки минимума квадратичной функции не более чем за n шагов.

С учетом взаимной ортогональности градиентов $\text{grad } F(\mathbf{x}^i)$ и условий исчерпывающего спуска по направлениям \mathbf{p}^k можно упростить выражения (5.4) и (5.5). Запишем числитель дроби (5.5) в виде

$$\begin{aligned} & (\text{grad } F(\mathbf{x}^k), \bar{\mathbf{p}}^k) = (\text{grad } F(\mathbf{x}^k), -\text{grad } F(\mathbf{x}^k) + \beta_{k-1} \mathbf{p}^{k-1}) = \\ & = -\|\text{grad } F(\mathbf{x}^k)\|^2 + \beta_{k-1} (\overline{\text{grad } F(\mathbf{x}^k)}, \mathbf{p}^{k-1}) = -\|\text{grad } F(\mathbf{x}^k)\|^2. \end{aligned} \quad (5.6)$$

Умножив обе части равенства (5.2) слева на матрицу A и прибавив к ним по вектору \mathbf{b} , получим

$$\text{grad } F(\mathbf{x}^{k+1}) = \text{grad } F(\mathbf{x}^k) + \alpha_k A \mathbf{p}^k. \quad (5.7)$$

С учетом формулы (5.7) упростим числитель в выражении (5.4) для β_k следующим образом:

$$\begin{aligned} (A \text{grad } F(\mathbf{x}^{k+1}), \mathbf{p}^k) &= (\text{grad } F(\mathbf{x}^{k+1}), A \mathbf{p}^k) = \\ &= (\text{grad } F(\mathbf{x}^{k+1}), (\text{grad } F(\mathbf{x}^{k+1}) - \text{grad } F(\mathbf{x}^k) / \alpha_k)) = \frac{\|\text{grad } F(\mathbf{x}^{k+1})\|^2}{\alpha_k}. \end{aligned}$$

В результате получим

$$\alpha_k = \frac{\|\text{grad } F(\mathbf{x}^k)\|^2}{(A \mathbf{p}^k, \mathbf{p}^k)}, \quad (5.8)$$

$$\beta_k = \frac{\|\text{grad } F(\mathbf{x}^{k+1})\|^2}{\|\text{grad } F(\mathbf{x}^k)\|^2}. \quad (5.9)$$

Выражение (5.9) для коэффициента β_k не содержит в явном виде матрицу A квадратичной функции. Поэтому метод сопряженных градиентов может применяться и для минимизации неквадратичных функций. В этом случае итерационный процесс метода описывается соотношениями

$$\begin{aligned} \mathbf{x}^{k+1} &= \bar{\mathbf{x}}^k + \alpha_k \mathbf{p}^k, \quad \mathbf{x}^0 \in R^n, \\ \mathbf{p}^k &= -\text{grad } F(\mathbf{x}^0), \quad k = 0, 1, 2, \dots; \end{aligned} \quad (5.10)$$

$$F(\mathbf{x}^k + \alpha_k \mathbf{p}^k) = \min_{\alpha > 0} F(\mathbf{x}^k + \alpha \mathbf{p}^k), \quad k = 0, 1, 2, \dots; \quad (5.11)$$

$$\mathbf{p}^{k+1} = -\text{grad } F(\mathbf{x}^{k+1}) + \beta_k \mathbf{p}^k, \quad k = 0, 1, \dots; \quad (5.12)$$

$$\beta_k = \frac{\|\text{grad } F(\mathbf{x}^{k+1})\|^2}{\|\text{grad } F(\mathbf{x}^k)\|^2}, \quad k = 1, 2, \dots \quad (5.13)$$

Разумеется, процесс (5.10)–(5.13) может не приводить к точке минимума функции $F(\mathbf{x})$, отличной от квадратичной, за конечное число итераций. Точное определение α_k из условия (5.11) возможно получить лишь в редких случаях. Поэтому реализация каждой итерации будет сопровождаться неизбежными погрешностями. Эти погрешности, накапливаясь, могут привести к тому, что векторы \mathbf{p}^k перестанут указывать направление убывания функции и сходимость метода может нарушиться. Поэтому на практике в методе сопряженных градиентов через N шагов производят обновление метода, полагая $\beta_{mN} = 0, m = 1, 2, \dots$. Номера mN называют моментами обновления метода (рестарта). Часто полагают $N = n$, где n — размерность пространства R^n . Если $N = 1$, то получится частный случай метода сопряженных градиентов — метод наискорейшего спуска.

Опишем алгоритм метода сопряженных градиентов.

Шаг 0. Задать параметр точности $\varepsilon > 0$, выбрать $\mathbf{x}^0 \in R^n$, найти $\text{grad} F(\mathbf{x}^0)$.

Шаг 1. Положить $k = 0, \mathbf{p}^0 = -\text{grad} F(\mathbf{x}^0)$.

Шаг 2. Решить задачу одномерной минимизации

$$F(\mathbf{x}^k + \alpha \mathbf{p}^k) \rightarrow \min, \alpha > 0, \text{ т. е. найти } \alpha = \alpha_k.$$

Шаг 3. Положить $\bar{\mathbf{x}}^{k+1} = \bar{\mathbf{x}}^k + \alpha_k \bar{\mathbf{p}}^k$ и вычислить $\text{grad} F(\mathbf{x}^{k+1})$.

Проверить условие достижения точности $\|\text{grad} F(\mathbf{x}^{k+1})\| < \varepsilon$. Если оно выполняется, то положить $\mathbf{x}^0 = \mathbf{x}^{k+1}, \text{grad} F(\mathbf{x}^0) = \text{grad} F(\mathbf{x}^{k+1})$ и закончить поиск, иначе — перейти к шагу 4.

Шаг 4. Проверить условие $k + 1 = n$. Если оно выполняется, то положить $\mathbf{x}^0 = \mathbf{x}^{k+1}, \text{grad} F(\mathbf{x}^0) = \text{grad} F(\mathbf{x}^{k+1})$ и перейти к шагу 1 (рестарт), иначе — перейти к шагу 5.

Шаг 5. Вычислить коэффициент $\beta_k = \frac{\|\text{grad} F(\mathbf{x}^{k+1})\|^2}{\|\text{grad} F(\mathbf{x}^k)\|^2}$ и найти

новое направление поиска $\mathbf{p}^{k+1} = -\text{grad} F(\mathbf{x}^{k+1}) + \beta_k \mathbf{p}^k$. Положить $k = k + 1$ и перейти к шагу 2.

Примечание. Вблизи точки минимума дважды дифференцируемая функция с положительно определенной матрицей Гессе $F''(\mathbf{x}^*)$, как прави-

ло, достаточно хорошо аппроксимируется квадратичной функцией. Поэтому можно надеяться на хороший результат применения этого метода для таких функций.

Пример. Методом сопряженных градиентов найти точку минимума функции $F(\mathbf{x}) = 4x_1^2 + 3x_2^2 - 4x_1x_2 + x_1$ из начальной точки $\mathbf{x}^0 = (0, 0)$.

Итерация 1.

Шаг 0. Положим $\varepsilon = 0,01$; $\mathbf{x}^0 = (0, 0)$, найдем $\text{grad } F(\mathbf{x}^0) = (1, 0)$.

Шаг 1. Положим $k = 0$, $\mathbf{p}^0 = -\text{grad } F(\mathbf{x}^0) = (-1, 0)$.

Шаг 2. Решим задачу одномерной минимизации $F(\mathbf{x}^0 + \alpha \mathbf{p}^0) \rightarrow \rightarrow \min$. Получим $\alpha_0 = 1/8$ (для нахождения α_0 можно было воспользоваться формулой $\alpha_k = -(A\mathbf{x}^k + \mathbf{b}, \mathbf{p}^k) / (A\mathbf{p}^k, \mathbf{p}^k)$).

Шаг 3. Найдем $\mathbf{x}^1 = \mathbf{x}^0 + \alpha_0 \mathbf{p}^0 = (-1/8, 0)$ и $\text{grad } F(\mathbf{x}^1) = (0, 1/2)$. Точность не достигнута, перейдем к шагу 4.

Шаг 4. Проверим условие $k + 1 = n$, если оно не выполняется, перейдем к шагу 5.

Шаг 5. Найдем коэффициент $\beta_0 = 1/4$ и новое направление спуска $\mathbf{p}^1 = -\text{grad } F(\mathbf{x}^1) = \beta_0 \mathbf{p}^0 = (-1/4, -1/2)$.

Итерация 2.

Шаг 2. Решим задачу одномерной минимизации $F(\mathbf{x}^1 + \alpha \mathbf{p}^1) \rightarrow \rightarrow \min$. Получим $\alpha_1 = 1/4$.

Шаг 3. Найдем $\mathbf{x}^2 = \mathbf{x}^1 + \alpha_1 \mathbf{p}^1 = (-3/16, -1/8)$ и $\text{grad } F(\mathbf{x}^2) = (0, 0)$ — задача решена точно.

5.2.4. Метод проекции градиента

Пусть требуется найти $\min F(x_1, x_2, \dots, x_n)$ при условиях

$$\psi_1(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0;$$

$$\psi_2(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0;$$

.....

$$\psi_m(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0,$$

или $\Psi(\mathbf{x}) = 0$.

Условный минимум целевой функции находится на поверхности ограничений $\Psi(\mathbf{x}) = 0$, поэтому алгоритм метода проекции градиента состоит из двух основных этапов.

Этап 1. Возврат на поверхность ограничений из текущей точки поиска \mathbf{x}^k , если эта точка вышла за допустимые пределы нарушения ограничений $\Delta\psi$ (рис. 5.8): $\|\Psi(\mathbf{x}^k)\| \geq \Delta\psi$.

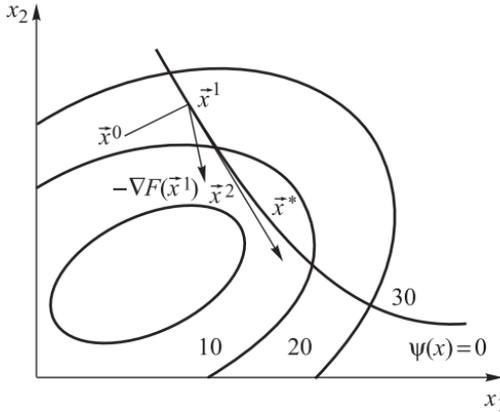


Рис. 5.8. Метод проекции градиента

Такое движение происходит из точки \mathbf{x}^k по нормали к поверхности ограничений (см. рис. 5.8) из точки \mathbf{x}^0 в точку \mathbf{x}^1 . Приращение зависит от величины отклонения и определяется по формуле

$$\Delta \mathbf{x}^{k+1} = -\Delta_k^T (\Delta_k \Delta_k^T)^{-1} \Psi(\mathbf{x}^k),$$

где Δ_k — матрица размеров $(m \times n)$, строками которой являются градиенты функций-ограничений $\psi_j(\mathbf{x})$, вычисленные в точке \mathbf{x}^k :

$$\Delta_k = \begin{bmatrix} \frac{\partial \psi_1}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial \psi_1}{\partial x_n} \\ \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial \psi_m}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial \psi_m}{\partial x_n} \end{bmatrix},$$

где $\Psi(\mathbf{x}^k)$ — вектор-функция ограничений в точке \mathbf{x}^k .

Таким образом, на этапе 1

$$\mathbf{x}^{k+1} = \mathbf{x}^k + \Delta \mathbf{x}^{k+1}.$$

После попадания в малую окрестность поверхности ограниченной выполняется второй этап алгоритма.

Этап 2. Перемещение в сторону условного экстремума вдоль линеаризованной поверхности ограничений, т. е. вдоль многомерной плоскости, касательной к поверхности ограничений в точке \mathbf{x}^k . Направление поиска минимума определяется по направлению проекции антиградиента целевой функции на эту плоскость:

$$\mathbf{s}^k = H_k \text{grad } F(\mathbf{x}^k).$$

Здесь $H_k = I - \Delta_k^T (\Delta_k \Delta_k^T)^{-1} \Delta_k$ — проектирующая матрица, где I — единичная матрица порядка n . Тогда

$$\mathbf{x}^{k+1} = \mathbf{x}^k - h_k \mathbf{s}^k = \mathbf{x}^k - h_k H_k \text{grad } F(\mathbf{x}^k),$$

где h_k — величина шага.

Если поверхность ограничений не линейна, то перемещение вдоль гиперповерхности может привести к нарушению условий $\|\Psi(\mathbf{x}^k)\| < \Delta\Psi$. Тогда повторяется этап 1 и т. д.

5.3. Задание к лабораторной работе

Найти минимум функции методом наискорейшего спуска (табл. 5.1).

Таблица 5.1

Варианты функций к лабораторной работе «Методы оптимизации»

№ варианта	$f(x, y)$
1	$x^3 + y^3 - 3xy$
2	$2x^3 + 3y^3 - 4xy$
3	$x^2 + xy + y^2 - 3x - 6y$
4	$2x^2 + 3xy + 4y^2 - 2x - 3y$
5	$4x^2 + 3xy + 2y^2 - 3x - 2y$
6	$xy^2(1 - x - y), (x > 0, y > 0)$
7	$x^2y(1 - x - y), (x > 0, y > 0)$
8	$xy + \frac{20}{x} + \frac{50}{y}, (x > 0, y > 0)$

№ варианта	$f(x, y)$
9	$3x^2 - x^3 + 3y^2 + 4y$
10	$3x^2 - y^3 + 3y^2 + 4x$
11	$xy + \frac{50}{x} + \frac{20}{y}, (x > 0, y > 0)$
12	$x^2 + y^2 - 2 \ln x - 18 \ln y, (x > 0, y > 0)$
13	$x^3 + 3xy^2 - 15x - 12y$
14	$(2x^2 + y^2)e^{-(x^2+y^2)}$
15	$(5x^2 + 2y^2)e^{-(x^2+y^2)}$
16	$4x^2 + xy + y^2 - 4x - 6y$
17	$3x^2y + y^3 - 12x - 15y$
18	$2xy + \frac{100}{x} + \frac{40}{y}$
19	$x^2 - x^2y + 2y^3 + 5y^2$
20	$2x^3 - xy^2 + 5x^2 + y^2$
21	$x^2 + xy + 4x^2 - 4x - 6y$
22	$2xy + \frac{40}{x} + \frac{100}{y}$
23	$x^2 + y^2 + z^2 - 4x + 6y - 2z$
24	$x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 6y - 4z$
25	$x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 8y - 4z$
26	$x^2 + y^2 + z^2 + 2x + 6y - 4z$
27	$(x^2 + 2y^2)e^{-(x^2+y^2)}$
28	$(2x^2 + 5y^2)e^{-(x^2+y^2)}$
29	$2x^2 + 3xy + 4y^2 - 2x - 3y$
30	$4x^2 + 3xy + 2y^2 - 3x - 2y$

Литература

Амосов А.А., Дубинский Ю.А., Копченова Н.В. Вычислительные методы. М.: Изд-во МЭИ, 2008. 672 с.

Бахвалов Н.С., Жидков Н.П., Кобельков Г.М. Численные методы. М.: Лаборатория базовых знаний, 2002. 632 с.

Бахвалов Н.С., Лапин А.В., Чижевский Е.В. Численные методы в задачах и упражнениях. М.: Высшая школа, 2000. 190 с.

Вержбицкий В.М. Основы численных методов. М.: Высшая школа, 2005. 840 с.

Костомаров Д.П., Фаворский А.П. Вводные лекции по численным методам. М.: Университетская книга; Логос, 2006. 184 с.

Лесин В.В., Лисовец Ю.П. Основы методов оптимизации. М.: МАИ, 1995.

Самарский А.А. Введение в численные методы. СПб.: Лань, 2005. 288 с.

Самарский А.А., Вабищевич П.Н., Самарская Е.А. Задачи и упражнения по численным методам. М.: Эдиториал УРСС, 2003. 208 с.

Оглавление

Предисловие.....	3
1. ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ ВЫЧИСЛЕНИЯ ОПРЕДЕЛЕННОГО ИНТЕГРАЛА	4
1.1. Квадратурные формулы.....	4
1.1.1. Формула средних прямоугольников	5
1.1.2. Формула трапеций	7
1.1.3. Формула Симпсона.....	8
1.1.4. Составные квадратурные формулы.....	9
1.1.5. Квадратурные формулы Гаусса	11
1.2. Правило Рунге практической оценки погрешности	15
1.3. Задание к лабораторной работе.....	18
2. ПРИБЛИЖЕННОЕ ВЫЧИСЛЕНИЕ ДВОЙНОГО ИНТЕГРАЛА.....	21
2.1. Численные методы вычисления двойного интеграла	21
2.1.1. Метод ячеек	21
2.1.2. Последовательное интегрирование с использованием формулы трапеций	27
2.1.3. Последовательное интегрирование с использованием квадратурных формул Гаусса	29
2.2. Задание к лабораторной работе.....	31
3. ЗАДАЧА КОШИ ДЛЯ ОБЫКНОВЕННЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ.....	34
3.1. Численные методы решения задачи Коши.....	34
3.1.1. Явный метод Эйлера.....	35
3.1.2. Методы Рунге — Кутты.....	40
3.1.3. Многшаговые методы Адамса	41
3.1.4. Правило Рунге практической оценки погрешности....	43
3.2. Интегрирование систем обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка.....	45
3.3. Задание к лабораторной работе.....	47

4. КРАЕВАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ ЛИНЕЙНОГО ОБЫКНОВЕННОГО ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ ВТОРОГО ПОРЯДКА	54
4.1. Численные методы решения краевой задачи	54
4.1.1. Разностная аппроксимация производных	54
4.1.2. Решение задачи методом прогонки	56
4.1.3. Решение задачи методом стрельбы	56
4.2. Задание к лабораторной работе	58
5. ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ ОПТИМИЗАЦИИ	61
5.1. Одномерная оптимизация	61
5.2. Многомерная оптимизация	64
5.2.1. Метод покоординатного спуска	64
5.2.2. Метод наискорейшего (градиентного) спуска	66
5.2.3. Метод сопряженных градиентов	67
5.2.4. Метод проекции градиента	71
5.3. Задание к лабораторной работе	73
Литература	75

Учебное издание

Федотов Анатолий Александрович
Храпов Павел Васильевич

**Численные методы
интегрирования, решения
дифференциальных уравнений
и задач оптимизации**

Редактор *Е.Д. Нефедова*
Корректор *Л.В. Забродина*
Художник *А.С. Ключева*
Компьютерная графика *Т.Ю. Кутузовой*
Компьютерная верстка *О.В. Беляевой*

В оформлении использованы шрифты
Студии Артемия Лебедева.

Оригинал-макет подготовлен
в Издательстве МГТУ им. Н.Э. Баумана.

Подписано в печать 28.07.2015. Формат 60 × 90/16.
Усл. печ. л. 4,875. Тираж 500 экз. Изд. № 003-2015. Заказ

Издательство МГТУ им. Н.Э. Баумана.
105005, Москва, 2-я Бауманская ул., д. 5, стр. 1.
press@bmstu.ru
www.baumanpress.ru

Отпечатано в типографии МГТУ им. Н.Э. Баумана.
105005, Москва, 2-я Бауманская ул., д. 5, стр. 1.
baumanprint@gmail.com